# ***Chương 3***

# **ĐẠI SỐ LOGIC**

*Nội dung Chương 3, đại số logic nhằm trang bị cho sinh viên kiến thức về mệnh đề, các phép toán của logic mệnh đề, các luật logic để biến đổi các biểu thức logic giúp hình thành tư duy logic cho sinh viên. Ngoài ra, trong Chương 3 còn giới thiệu về các suy luận, luật suy diễn. Phần cuối của Chương 3, giới thiệu về đại số boole, chuẩn tắc hội và chuẩn tắc tuyển. Trong Chương 3, để minh họa cho các định nghĩa, khái niệm, các luật logic, các luật suy diễn, chúng tôi đã sử dụng các ví dụ và xây dựng các ví dụ này thành hệ thống gắn liền với các bài tập cuối chương để sinh viên tiện theo dõi trong quá trình học tập môn học này.*

|  |
| --- |
| Aristoteles (tiếng Hy Lạp cổ: Ἀριστοτέλης [aristotélɛːs], Aristotélēs; hay còn được Anh hóa là Aristotle, phiên âm trong tiếng Việt là Aritxtốt; 384 – 322 TCN) là một nhà triết học và bác học thời Hy Lạp cổ đại, học trò của Platon và thầy dạy của Alexandros Đại đế. Di bút của ông bao gồm nhiều lĩnh vực như vật lý học, siêu hình học, thi văn, kịch nghệ, âm nhạc, luận lý học, tu từ học, ngôn ngữ học, kinh tế học, chính trị học, đạo đức học, sinh học, và động vật học. Ông được xem là người đặt nền móng cho môn luận lý học, và được mệnh danh là *“Cha đẻ của Khoa học chính trị”*. Ông cũng thiết lập một phương cách tiếp cận với triết học bắt đầu bằng quan sát và trải nghiệm trước khi đi tới tư duy trừu tượng. Cùng với Platon và Socrates, Aristoteles là một trong ba trụ cột của văn minh Hy Lạp cổ đại. |

Ý tưởng xây dựng tập hợp các quy tắc suy luận, suy diễn, là nền tảng cho việc nghiên cứu tri thức được đưa ra bởi nhà triết học Hy Lạp Aristotle (384 –322 trước công nguyên). Vào thế kỷ XVII, nhà Triết học và Toán học người Đức Gottfried Leibniz đã đưa ra ý tưởng sử dụng các biểu tượng biểu diễn quá trình suy luận theo cách tương tự như các ký hiệu đại số, biểu diễn quá trình suy luận về các con số và mối quan hệ của chúng. Ý tưởng của nhà toán học Leibniz được thực hiện hóa vào thế kỷ XIX bởi các nhà toán học người Anh George Bool và Augustus De Morgan, người sáng lập ra các chủ đề hiện đại của logic biểu tượng. Các nghiên cứu được tiếp tục cho đến ngày nay, logic tượng trưng là một trong những kiến thức là cơ sở lý thuyết cho nhiều lĩnh vực của khoa học máy tính như thiết kế mạch, kỹ thuật số, lý thuyết cơ sở dữ liệu quan hệ, lý thuyết về automat và tính toán, trí tuệ nhân tạo, v.v.

## **3.1. Mệnh đề và các phép toán mệnh đề**

*Nội dung của phần 3.1 chuyển hóa các phát biểu hàng ngày thành các logic mệnh đề và các logic vị từ. Giới thiệu các phép toán liên quan đến logic mệnh đề, các luật logic mệnh đề. Sử dụng các luật suy diễn để kiểm tra tính đúng đắn của một suy luận. Và cuối cùng giới thiệu và chuyển hóa các biểu thức logic về dạng chuẩn tắc hội hoặc chuyển tắc tuyển.*

### **3.1.1. Định nghĩa**

**Ví dụ 3.1**

Xét ví dụ với hai phát biểu sau đây, mặc dù nội dung của hai phát biểu này là khác nhau, nhưng hình thức logic của chúng là như nhau. Cả hai phát biểu đều có giá trị theo nghĩa: nếu cơ sở của chúng là đúng, thì kết luận cũng phải đúng.

**Phát biểu 1: “***Nếu cú pháp chương trình bị lỗi hoặc nếu việc thực thi chương trình dẫn đến chia cho 0 thì máy tính sẽ tạo ra một thông báo lỗi”.* Do đó, nếu máy tính không tạo ra thông báo lỗi, thì cú pháp chương trình là chính xác và việc thực hiện chương trình không dẫn đến tình huống chia cho 0.

**Phát biểu 2:** *“Nếu x là số thực thỏa mãn x< -2 hoặc x >2 thì x2 >4.”* Do đó, nếu x2 ≯ 4 thì x ≮ -2 và x ≯ 2.

Để minh họa hình thức logic của các phát biểu trên, chúng ta sử dụng các chữ cái của bảng chữ cái (chẳng hạn p, q, r) để biểu diễn các thành phần của câu phát biểu, và biểu thức *“not p”* để biểu diễn cho câu *“không phải là p”.* Do đó, dạng biểu thức logic chung của cả hai phát biểu trên được biểu diễn như sau:

*Nếu p hoặc q, thì r*

*Do đó, nếu không phải r, thì không phải p và không phải q.*

**Ví dụ 3.2**

Điền vào các vị trí trống để phát biểu (b) có dạng giống phát biểu (a). Sau đó đưa ra dạng biểu thức logic chung của hai phát biểu sử dụng các ký tự thay thế cho các thành phần câu:

Phát biểu (a): *“Nếu Nam học chuyên ngành Toán hoặc Nam học chuyên ngành Khoa học máy tính, thì Nam sẽ thi toán đạt 150.*

*Nam học chuyên ngành Khoc học máy tính. Do đó Nam sẽ thi toán đạt 150”*

Phát biểu (b): *“Nếu môn logic dễ, hoặc ...(1)....., thì ...(2)......*

*Tôi học tập chăm chỉ.*

*Do đó, tôi sẽ đạt điểm A của môn học”*

(1) Tôi học tập chăm chỉ

(2) Tôi sẽ đạt điểm A của môn học

|  |
| --- |
| **Hình thức chung của phát biểu A và phát biểu B:** |
| *Nếu p hoặc q, thì r.*  *q.*  *Do đó, r.* |

|  |
| --- |
| **Định nghĩa 3.1** |
| Mệnh đề là một khẳng định có giá trị chân lý xác định. Một mệnh đề chỉ nhận một trong hai giá trị đúng hoặc sai (không thể vừa đúng vừa sai).  Ký hiệu các biến mệnh đề bằng các ký hiệu p, q, r,...  Nếu p là một mệnh đề đúng, ta nói p nhận giá trị đúng, viết p = 1, hoặc p = T (True)  Nếu p là một mệnh đề sai, ta nói p nhận giá trị sai, viết p = 0, hoặc p = F (False) |

**Ví dụ 3.3**

*“2 cộng 2 bằng 4”* và *“2 cộng 2 bằng 5”* là hai mệnh đề, trong đó mệnh đề một đúng, còn mệnh đề hai sai.

**Lưu ý:**

Các câu hỏi, câu khẳng định, câu cảm thán, hoặc mệnh lệnh không phải mệnh đề vì không có giá trị xác định.

**Ví dụ 3.4**

Phát biểu *“Anh ta là một sinh viên”* không phải là một mệnh đề, vì trong một số trường hợp phát biểu này là đúng, nhưng trong một số trường hợp khác, phát biểu này sai.

Tương tự*, “x+y >2”* cũng không phải là 1 mệnh đề, bởi vì trong một số giá trị của x, y, phát biểu trên là đúng, một số trường hợp khác lại cho kết quả sai. Chẳng hạn, với x = 1, y = 2, phát biểu trên đúng, với x = -1 và y = 0 thì phát biểu trên sai.

|  |
| --- |
| **Phân loại mệnh đề** |
| Có hai loại mệnh đề:  ⬩ Mệnh đề sơ cấp (nguyên thủy): là mệnh đề không thể phân tách thành nhiều mệnh đơn đơn giản hơn.  ⬩ Mệnh đề phức hợp: là mệnh đề được tạo từ một hoặc nhiều mệnh đề khác bằng cách sử dụng các liên kết logic như và, hoặc, khi và chỉ khi, hoặc “*không phải...”* |

**Ví dụ 3.5**

Phát biểu p *=“15 chia hết cho 3”* là một mệnh đề sơ cấp

Phát biểu *“2 là số chẵn và 2 là số nguyên tố”* là một mệnh đề phức hợp.

### **3.1.2. Các phép toán logic**

#### *3.1.2.1. Phép phủ định*

|  |
| --- |
| **Định nghĩa 3.2** |
| Nếu p là một biến mệnh đề, phủ định của p là *“không phải p”*, ký hiệu là .  Nó có giá trị trái ngược với p: nếu p đúng thì , nếu p sai thì đúng |

**Bảng 3.1:** Bảng giá trị chân lý phép phủ định

|  |  |
| --- | --- |
| p |  |
| T | F |
| F | T |

**(**Ký hiệu T: True, F: False)

**Ví dụ 3.6**

- Nếu mệnh đề p = *“Hà Nội là thủ đô của Việt Nam”* thì phủ định của p là;

**-** Nếup **=** “*6 chia hết cho 3”*thì . Rõ ràng p đúng,

#### *3.1.2.2. Phép hội*

|  |
| --- |
| **Định nghĩa 3.3** |
| Cho p, q là các biến mệnh đề, phép hội của hai biến p, q được viết là *“p và q”,* ký hiệu .  Phép hội chỉ cho kết quả đúng (True) khi cả p và q cùng đúng, các trường hợp còn lại đều cho kết quả sai (False) |

**Ví dụ 3.7**

Trong ngôn ngữ thông thường, câu nói *“Trời nắng và trời nóng”* được hiểu là đúng nếu điều kiện nắng và nóng đều thỏa mãn. Nếu trời nóng, nhưng không nắng hoặc trời nắng nhưng không nóng, thì câu nói được hiểu là sai.

**Bảng 3.2:** Bảng giá trị chân lý của phép hội

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| p | q |  |
| T | T | T |
| T | F | F |
| F | T | F |
| F | F | F |

**Ví dụ 3.8**

Cho phát biểu *“6 chia hết cho 3 và 6 là một số chẵn”*;

Đặt p = *“6 chia hết cho 3”,* q = *“6 là một số chẵn”.* Mệnh đề cho kết quả True, vì p, q đều nhận giá trị True.

#### *3.1.2.3. Phép tuyển*

|  |
| --- |
| **Định nghĩa 3.4** |
| Cho p, q là các biến mệnh đề, phép tuyển của hai biến p, q được viết là *“p hoặc q”*, ký hiệu .  Phép tuyển chỉ cho kết quả sai (False) khi cả p và q cùng sai, các trường hợp còn lại đều cho kết quả đúng (True) |

**Bảng 3.3:** Bảng giá trị chân lý của phép tuyển

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| p | q |  |
| T | T | T |
| T | F | T |
| F | T | T |
| F | F | F |

**Ví dụ 3.9**

*“Số lẻ là số có tận cùng bằng 1, 3, 5, 7, 9 hoặc chia cho 2 dư 1”* là một mệnh đề có giá trị T

#### *3.1.2.4. Phép kéo theo*

Xem xét tình huống sau đây: Giả sử bạn đi phỏng vấn xin việc tại một cửa hàng và chủ cửa hàng cho bạn lời hứa: *“Nếu bạn đi làm vào sáng thứ hai, thì bạn sẽ có được công việc”*.

Trong trường hợp nào bạn có lý khi nói chủ cửa hàng nói sai? hay trong trường hợp nào lời hứa trên sai? Câu trả lời là: *Bạn đi làm vào sáng thứ Hai và bạn không nhận được công việc.*

Rốt cuộc, chủ cửa hàng hứa hẹn rằng bạn sẽ nhận được công việc nếu điều kiện (đi làm vào vào sáng thứ Hai) được đáp ứng; không nói gì về những gì sẽ xảy ra nếu điều kiện không được đáp ứng. Vì vậy, nếu điều kiện không được đáp ứng, bạn không thể biết lời hứa đúng hay sai, bất kể bạn có nhận được hay không nhận được công việc.

Ví dụ trên minh chứng rằng chỉ có duy nhất một tình huống đưa đến kết quả sai khi giả thuyết là đúng và kết luận là sai. Trong tất cả các trường hợp khác, kết quả nhận được là đúng.

|  |
| --- |
| **Định nghĩa 3.5** |
| Cho p, q là các biến mệnh đề, các phát biểu *“Nếu p thì q”* hoặc *“p kéo theo q”*, được ký hiệu , trong đó p là giả thuyết (tiền đề) và q là kết luận (hệ quả). sai (False) khi và chỉ khi p đúng và q sai, các trường hợp còn lại đều cho kết quả đúng (True) |

**Bảng 3.4:** Bảng giá trị chân lý của phép kéo theo p→ q

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| p | q |  |
| T | T | T |
| T | F | F |
| F | T | T |
| F | F | T |

**Ví dụ 3.10**

Xem xét câu phát biểu sau: *“Nếu 0= 1 thì 1 =2”.*

*Hướng dẫn:*

Đặt p = *“0 = 1”*, q = *“1 = 2”*

Phát biểu trên có dạng *“Nếu p thì q”*, và được ký hiệu .

p, q đều nhận giá trị sai, nhưng nhận giá trị đúng.

#### *3.1.2.5. Phép kéo theo 2 chiều*

|  |
| --- |
| **Định nghĩa 3.6** |
| Cho p, q là các biến mệnh đề, các phát biểu *“p nếu và chỉ nếu q”* hoặc *“p khi và chỉ khi q”*, *“p là điều kiện cần và đủ của q”* được ký hiệu , được gọi là phép kéo theo hai chiều.  đúng khi và chỉ khi p, q cùng giá trị chân lý (cùng đúng hoặc cùng sai), sai khi và chỉ khi p, q có giá trị chân lý ngược. |

**Bảng 3.5:** Bảng giá trị chân lý của phép kéo theo hai chiều

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| p | q |  |
| T | T | T |
| T | F | F |
| F | T | F |
| F | F | T |

**Ví dụ 3.11**

*“Số tự nhiên n chia hết cho 3 khi và chỉ khi tổng các chữ số của n chia hết cho 3”*

*Hướng dẫn:*

Đặt p = *“Số tự nhiên n chia hết cho 3”,* q = *“tổng các chữ số của n chia hết cho 3”*

Phát biểu trên được thể hiện qua biểu thức logic

#### *3.1.2.6. Biểu thức logic*

|  |  |
| --- | --- |
| **Định nghĩa 3.7** | |
| Biểu thức logic là một biểu thức được cấu tạo từ các mệnh đề (p, q, r,..) và các phép toán logic , kết hợp các dấu mở đóng ngoặc ( ).  Bảng giá trị chân lý của một biểu thức logic ghi lại tất cả các trường hợp có thể xảy ra của biểu thức logic theo các biến mệnh đề. Nếu có n biến mệnh đề thì bảng giá trị chân lý sẽ có 2n dòng (không kể dòng tiêu đề). | |
| **Mức độ ưu tiên của các phép toán logic trong biểu thức logic** | |
| Mức độ ưu tiên thứ nhất |  |
| Mức độ ưu tiên thứ hai | , khi có mặt đồng thời trong một biểu thức, ưu tiên trong phép toán thực hiện trong dấu ngoặc đơn. |
| Mức độ ưu tiên thứ ba | , khi có mặt đồng thời trong một biểu thức, ưu tiên trong phép toán thực hiện trong dấu ngoặc đơn |

**Ví dụ 3.12**

*Xây dựng bảng giá trị chân lý cho biểu thức sau đây:*

*Hướng dẫn:*

Ý nghĩa của biểu thức logic A: chỉ p hoặc q (p và q không đồng thời). Biểu thức A còn được viết ở dạng khác hoặc p XOR q

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| p | q |  |  |  |  |
| T | T | T | T | F | F |
| T | F | T | F | T | T |
| F | T | T | F | T | T |
| F | F | F | F | T | F |

**Ví dụ 3.13**

*Xây dựng bảng giá trị chân lý cho biểu thức sau đây:*

B =

*Hướng dẫn:*

**Xây dựng bảng giá trị chân lý của biểu thức**

Tạo bảng với tiêu đề của các cột là p, q, r, , , . Với 3 biến mệnh đề p, q, r thì 23 giá trị khi kết hợp các biến này.

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| p | q | r |  |  |  |
| T | T | T | T | F | T |
| T | T | F | T | T | T |
| T | F | T | F | F | F |
| T | F | F | F | T | T |
| F | T | T | F | F | F |
| F | T | F | F | T | T |
| F | F | T | F | F | F |
| F | F | F | F | T | T |

**Ví dụ 3.14**

Xác định bảng giá trị chân lý của biểu thức logic sau đây:

*Hướng dẫn:*

Xây dựng bảng giá trị chân lý của biểu thức

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| P | q |  |  |  |  |
| T | T | F | F | T | F |
| T | F | F | T | T | F |
| F | T | T | F | F | T |
| F | F | T | T | F | T |

#### *3.1.2.7. Tương đương logic*

|  |
| --- |
| **Định nghĩa 3.8** |
| Hai biểu thức logic được gọi là tương đương logic nếu có cùng bảng giá trị chân lý. Sự tương đương logic của 2 biểu thức A, B được biểu thị hoặc |

|  |
| --- |
| **Kiểm tra hai biểu thức P và Q có tương đương logic?** |
| **Bước 1:** Xây dựng bảng giá trị chân lý với 1 cột là các giá trị của P, và một cột thể hiện các giá trị của Q (giá trị các dòng của P và Q được xác định dựa vào giá trị của các biến mệnh đề trong biểu thức).  **Bước 2:** Kiểm tra giá trị của từng dòng của biểu thức P, so sánh với giá trị dòng tương ứng của Q.  Nếu giá trị của tất cả các dòng của biểu thức P giống với giá trị của các dòng của biểu thức Q, thì kết luận P và Q tương đương logic.  Nếu một trong các dòng giá trị của P khác với dòng tương ứng của Q, thì P và Q không tương đương logic. |

**Ví dụ 3.15**

**Chứng minh**

Xây dựng giá trị chân lý cho 2 biểu thức A= p và B =

*Hướng dẫn:*

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| p |  |  |
| T | F | T |
| F | T | F |

**Ví dụ 3.16**

Chứng minh 2 biểu thức logic

A= và B= không tương đương logic.

*Hướng dẫn:*

Xây dựng bảng giá trị chân lý của hai biểu thức A, B:

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| P | q |  |  |  |  |  |
| T | T | F | F | T | F | F |
| T | F | F | T | F | T | F |
| F | T | T | F | F | T | F |
| F | F | T | T | F | T | T |

**Ví dụ 3.17**

Chứng minh 2 biểu thức

A = và B = tương đương logic.

*Hướng dẫn:*

Xây dựng bảng giá trị chân lý của 2 biểu thức A, B

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| P | q |  |  |  |  |  |
| T | T | F | F | T | F | F |
| T | F | F | T | F | T | T |
| F | T | T | F | F | T | T |
| F | F | T | T | F | T | T |

Do đó: .

Công thức này được gọi là công thức phủ định (De Morgan)

Tương tự, ta cũng có

**Ví dụ 3.18**

Chứng minh rằng hai biểu thức

A = và B = ) tương đương logic.

*Hướng dẫn:*

Xây dựng bảng giá trị chân lý của 2 biểu thức A, B.

|  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| p | q | r |  |  |  |  |  |
| T | T | T | T | T | T | T | T |
| T | T | F | T | F | F | F | F |
| T | F | T | T | T | T | T | T |
| T | F | F | T | F | T | F | F |
| F | T | T | T | T | T | T | T |
| F | T | F | T | T | F | F | F |
| F | F | T | F | T | T | T | T |
| F | F | F | F | T | T | T | T |

Dựa vào bảng giá trị chân lý của hai biểu thức A và B, giá trị các dòng của A và B giống hệt nhau. Do đó, A và B tương đương logic.

**Ví dụ 3.19**

Chứng minh rằng hai biểu thức logic

A = và B = tương đương logic.

*Hướng dẫn:*

Xây dựng bảng giá trị chân lý của 2 biểu thức A, B.

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| P | q |  |  |  |  |
| T | T | T | T | T | T |
| T | F | F | T | F | F |
| F | T | T | F | F | F |
| F | F | T | T | T | T |

Dựa vào bảng giá trị chân lý của hai biểu thức A và B, giá trị các dòng của A và B giống hệt nhau. Do đó, A và B tương đương logic.

#### *3.1.2.8. Hằng đúng, hằng sai*

|  |
| --- |
| **Định nghĩa 3.9** |
| **Hằng đúng (tautology):** Biểu thức logic P gọi là hằng đúng nếu bảng giá trị chân lý của P luôn bằng 1(T) trong mọi trường hợp của các biến mệnh đề trong biểu thức P. Khi đó, ta có thể viết P.  **Hằng sai (contradication):** Biểu thức logic P gọi là hằng sai nếu bảng giá trị chân lý của P luôn bằng 0 (F) trong mọi trường hợp của các biến mệnh đề trong biểu thức P. Khi đó, ta có thể viết P . |

**Ví dụ 3.20**

Chứng minh là 1 hằng đúng và là 1 hằng sai.

*Hướng dẫn:*

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| p |  |  |  |
| T | F | T | F |
| F | T | T | F |

Tất cả các giá trị trên các dòng của biểu thức A luôn bằng T, do đó A là một hằng đúng. Ngược lại, tất cả các giá trị trên các dòng của biểu thức B luôn bằng F, hay B là một hằng sai.

#### *3.1.2.9. Ứng dụng của logic*

Logic có nhiều ứng dụng quan trọng trong Toán học, Khoa học máy tính và nhiều lĩnh vực khác của cuộc sống. Các phát biểu trong Toán học và khoa học, ngôn ngữ tự nhiên thường không chính xác hoặc mơ hồ. Để các phát biểu này chính xác, chúng ta có thể sử dụng ngôn ngữ của logic. Chẳng hạn, logic được sử dụng trong đặc tả của phần mềm và phần cứng, bởi những thông số kỹ thuật cần phải chính xác trước khi bắt đầu phát triển. Hơn nữa, logic mệnh đề và các quy tắc của nó còn được sử dụng để thiết kế mạch, xây dựng các chương trình, xác minh tính đúng đắn của các chương trình, xây dựng các hệ thống chuyên gia.

***Ứng dụng 1:*** *Chuyển các phát biểu bằng ngôn ngữ tự nhiên sang biểu thức logic, loại bỏ sự mơ hồ, không chính xác.*

**Ví dụ 3.21**

*“Bạn chỉ có thể truy cập Internet từ trường, chỉ khi bạn là sinh viên khoa công nghệ thông tin hoặc bạn không phải là sinh viên năm thứ nhất”.*

*Hướng dẫn:*

p = *“Bạn có thể truy cập Internet từ trường”*

q = *“Bạn là sinh viên khoa công nghệ thông tin”*

r = *“Bạn không phải là sinh viên năm thứ nhất”*

Biểu thức logic thay thế cho phát biểu trên là:

**Ví dụ 3.22**

*“Bạn không được phép đi tàu lượn siêu tốc, nếu bạn cao dưới 1.4m, trừ khi bạn trên 16 tuổi”*

*Hướng dẫn:*

*p = “Bạn có thể đi tàu lượn siêu tốc”*

*q = “Bạn cao dưới 1.4m”*

*r = “Bạn trên 16 tuổi”*

Biểu thức logic thay thế cho phát biểu trên là:

***Ứng dụng 2:*** *Đặc tả hệ thống*

Chuyển các phát biểu trong ngôn ngữ tự nhiên thành các biểu thức logic là công việc cần thiết trong đặc tả hệ thống phần cứng và phần mềm. Các kỹ sư phần cứng và phần mềm sử dụng các đặc tả này làm cơ sở để phát triển hệ thống.

**Ví dụ 3.23**

Đặc tả *“Không thể gửi trả lời tự động khi hệ thống tập tin bị tràn”*

*p = “Gửi trả lời tự động”*

*q = “Hệ thống tập tin tràn”*

Đặc tả trên được thay thế bằng biểu thức

Các đặc tả hệ thống phải nhất quán, nghĩa là chúng không được chứa các yêu cầu bị xung đột dẫn đến các mâu thuẫn. Khi các đặc tả không nhất quán, sẽ không có cách nào để phát triển hệ thống thỏa mãn các đặc tả.

**Ví dụ 3.24**

Xác định các đặc tả hệ thống có phù hợp không?

*“Thông báo chuẩn đoán được lưu trữ trong bộ đệm hoặc được truyền lại”*

*“Thông báo chuẩn đoán không được lưu trữ trong bộ đệm”*

*“Nếu thông báo chuẩn đoán được lưu trong bộ đệm, thì nó được truyền lại”*

*Hướng dẫn:*

Để kiểm tra các đặc tả trên có nhất quán hay không, chúng ta sẽ chuyển các đặc tả này thành các biểu thức logic

Đặt p = *“Thông báo chuẩn đoán được lưu trong bộ đệm”*

Đặt q = *“Thông báo chuẩn đoán được truyền lại”*

Các đặc tả hệ thống có thể được viết dưới dạng

Việc gán giá trị cho các đặc tả đều dẫn đến kết quả p sai để đúng. Khi đó để đúng thì q đúng. Khi đó p sai, q đúng nên đúng, nên chúng ta có thể kết luận các đặc tả này hoàn toàn phù hợp, tất các các đặc tả đều đúng khi p sai, q đúng. Có thể sử dụng bảng giá trị chân lý được xây dựng với hai biến mệnh đề p, q cho các biểu thức trên để đi đến kết luận tương tự.

**Ví dụ 3.25**

Các đặc tả trên còn phù hợp không nếu thêm đặc tả sau:

*“Thông báo chuẩn đoán không được truyền lại”*

Ở Ví dụ 3.24, các biểu thức logic nhận giá trị đúng khi p sai, q đúng.

Tuy nhiên, đặc tả mới thêm vào này là nhận kết quả sai khi q đúng. Do đó, bốn đặc tả này không nhất quán với nhau.

***Ứng dụng 3:*** *Tìm kiếm boolean*

Các kết nối logic được sử dụng rộng rãi trong tìm kiếm tập dữ liệu lớn, được cung cấp bởi hàng triệu trang Web trên thế giới. Bởi vì các tìm kiếm này sử dụng các kỹ thuật từ logic mệnh đề nên được gọi là tìm kiếm boolean.

Hiện tại, nhiều máy truy tìm hỗ trợ thêm các phép toán như là OR, AND và NOT. Khi dùng thì tên của các phép toán này bắt buộc phải viết chữ in hoa. Phép toán boole đòi hỏi điền vào đúng vị trí quy định một từ (hay một cụm từ trong ngoặc kép) giữ vai trò của toán tử. Ngoài ra, đa số máy truy tìm chỉ hoạt động tốt trong một số lượng giới hạn các phép toán boole cho một bộ từ khoá. Lời khuyên chung là không nên dùng quá 6 phép toán boole cho cùng một bộ từ khoá và không phải máy truy tìm nào cũng hỗ trợ đầy đủ các phép toán AND, OR hay NOT

OR: Có cú pháp là (Toán tử 1) OR (Toán tử 2). Lệnh này cho phép tìm những trang Web nào có chứa một trong các toán tử của phép toán OR của bộ từ khoá. Ví dụ để tìm các bài viết về Nguyễn Trãi trong cả tiếng Việt và tiếng nước ngoài thì có thể dùng bộ từ khoá *“Nguyễn Trãi”* OR *“Nguyen Trai”*. Nhập từ khóa *“TCP/IP OR NetBEUI”*, kết quả sẽ hiển thị giao thức mạng TCP/IP hoặc NetBEUI.

Các máy truy tìm có thể dùng OR là: AltaVista, AOL Search, Excite, Google, Inktomi (HotBot, MSN), Ask Jeeves, Lycos, Northern Light, HotBot và Gigablast.

AND: Có cú pháp (Toán tử 1) AND (Toán tử 2). Phép toán AND nhằm yêu cầu máy truy tìm kiếm các trang có sự hiện diện của tất cả các toán tử. Ví dụ *“nanotechology AND health”* sẽ giúp truy tìm các trang có mặt đồng thời hai chữ health và chữ nanotechnology. Nhập từ khóa *“heart AND attack”*, công cụ tìm kiếm sẽ liệt kê các trang có xuất hiện cả hai từ nói trên. Điều này, giúp tránh được các kết quả đưa ra không phù hợp.

Một số trang truy tìm sẽ dùng AND như là mặc định (trong đó có Google). Bạn cũng có thể thay thế bằng cách dùng dấu + trong một số trường hợp nào máy truy tìm không có chức năng của đại số Bool. Các trang hỗ trợ phép toán AND là: AltaVista, AOL Search, Excite, Inktomi (HotBot, MSN), Northern Light, Yahoo và Gigablast.

NOT: Phép này hoàn toàn tương tự như cách dùng dấu -. Nghĩa là, sự truy tìm sẽ loại bỏ những trang mà nội dung có chứa toán tử đứng ngay sau phép toán NOT. Tuy nhiên trong nhiều máy truy tìm có hỗ trợ thì phép này cũng chỉ được dùng có một lần cho một bộ từ khoá.

Ví dụ để tìm tài liệu hướng dẫn về ngôn ngữ lập trình C/C++ có thể thử dùng trên Altavista “C/C++ tutor” NOT book. Nhập từ khóa *“orange NOT juice”*, kết quả sẽ hiển thị thông tin chứa từ orange nhưng không có từ juice.

Các trang có thể dùng NOT là AOL Search, Excite, Inktomi (HotBot, MSN), Northern Light và Gigablast.

***Ứng dụng 4:*** *Giải các câu đố logic*

Các câu đố được giải quyết bằng các luật logic được gọi là các câu đố logic. Việc giải quyết các câu đố logic là cách thực hành tốt nhất để hiểu rõ về các luật logic, đôi khi người ta còn xây dựng thành các chương trình máy tính để giải quyết các bài toán logic nổi tiếng. Rất nhiều người thích tham gia giải quyết các bài toán logic được giới thiệu trong các sách, ấn phẩm định kỳ, trên các trang web như một hoạt động giải trí.

**Ví dụ 3.26**

*( Ví dụ này cũng được đề cập lại trong phần chứng minh bằng mâu thuẫn trong phần các luật suy diễn)*

Nhà logic học Smullyan đã đặt ra một câu đố về một hòn đảo, ở đó có hai loại cư dân. Hiệp sĩ, những người luôn nói sự thật, và những nô lệ của họ, những kẻ luôn nói dối. Bạn gặp hai người A, B trên hòn đảo. A, B là loại người nào nếu A nói *“B là một hiệp sĩ”*, còn B thì nói *“Chúng tôi là những người đối nghịch”*. (Không cùng kiểu cư dân)

*Hướng dẫn:*

Đặt p = *“A là một hiệp sĩ”*

q = *“B là một hiệp sĩ”*

Do đó = *“A là một nô lệ”* , = *“B là một nô lệ”*

Phát biểu *“Chúng tôi là những người đối nghịch”* tương đương với biểu thức logic

Đầu tiên, xem xét khả năng A là một hiệp sĩ, mệnh đề p đúng. Nếu A là một hiệp sĩ, anh ta luôn nói thật, do đó B là một hiệp sĩ. Như vậy mệnh đề q đúng, và A, B cùng kiểu cư dân (cùng là hiệp sĩ). Tuy nhiên, nếu B là hiệp sĩ, thì B luôn nói sự thật, phát biểu của B *“Chúng tôi là những người đối nghịch”* luôn nhận giá trị đúng, hay biểu thức nhận giá trị đúng. Nhưng điều này không đúng, vì nhận giá trị sai khi p đúng, và q đúng.

Do đó, ta có thể kết luận A không phải hiệp sĩ, nghĩa là p sai.

Nếu là A là một nô lệ, thì A luôn nói dối, do đó phát biểu của A *“B là một hiệp sĩ”* sai, hay B không phải hiệp sĩ, B là một nô lệ.

Hơn nữa, nếu B là một nô lệ, b luôn nói dối, lời nói của B *“Chúng tôi là những người đối nghịch”* sai, hay A, B cùng kiểu người, phù hợp với kết quả A, B đều là nô lệ.

Chúng ta đi đến kết luận A, B đều là nô lệ.

### **3.1.3. Các luật logic**

**Bảng 3.6:** Bảng tổng hợp các luật logic

|  |
| --- |
| **Luật logic** |
| Cho các biến mệnh đề p, q, r và các hằng đúng T, hằng sai F  **1. Luật giao hoán**    **2. Luật kết hợp**    **3. Luật phân phối**    **4. Luật phủ định của phủ định**  **5. Luật De Morgan**    **6. Luật kéo theo**  **7. Luật tương đương**  **8. Luật trung hòa**    **9. Luật thống trị**    **10. Luật lũy đẳng**    **11. Luật phần tử bù** |

Việc chứng minh các luật trên dựa vào việc lập bảng giá trị chân lý.

**Ví dụ 3.27**

Chứng minh luật De Morgan dựa vào việc lập bảng giá trị chân lý

*Hướng dẫn:*

Xây dựng bảng giá trị chân lý, so sánh giá trị từng dòng của vế trái và vế phải

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| p | q |  |  |  |  |  |  |  |  |
| T | T | F | F | T | T | F | F | F | F |
| T | F | F | T | T | F | F | F | T | T |
| F | T | T | F | T | F | F | F | T | T |
| F | F | T | T | F | F | T | T | T | T |

Các luật khác được chứng minh tương tự.

**Vi dụ 3.28**

Dựa vào các luật logic chứng minh rằng:

**Ý tưởng:**

**-** Sử dụng các luật logic, thay thế các thành phần của biểu thức logic bên trái bằng các biểu thức logic tương đương. Sau mỗi bước thực hiện, ta thu được biểu thức logic tương đương logic với biểu thức ban đầu. Tiếp tục thực hiện, cho đến khi thu được biểu thức logic bên phải.

- Nếu gặp các phép phủ định, thường sử dụng luật phủ định của phủ định, luật De Morgan để biến đổi biểu thức. Nếu gặp phép kéo theo, hoặc phép kéo theo hai chiều thì sử dụng luật kéo theo và luật tương đương. Sử dụng các các luật giao hoán, kết hợp, phân phối để thay thế biểu thức logic. Sử dụng các luật trung hòa, thống trị, lũy đẳng để thu gọn biểu thức.

*Hướng dẫn:*

(Luật De Morgan)

(Luật phủ định của phủ định)

(Luật phân phối)

(Luật giao hoán với phép )

(Luật phần tử bù)

(Luật trung hòa)

**Ví dụ 3.29**

Chứng minh rằng:

*Hướng dẫn:*

(Luật kéo theo)

(Luật giao hoán, luật kết hợp) (Luật lũy đẳng)

(Luật De Morgan)

(Luật kéo theo)

**Ví dụ 3.30**

Chứng minh rằng:

a. b**.**

*(Kết quả của Ví dụ 3.24 này còn được gọi với tên là luật hấp thụ)*

*Hướng dẫn:*

a. (Luật trung hòa, thay thế p bởi )

(Luật phân phối)

(Luật thống trị)

(Luật trung hòa)

Do đó

b. (Luật trung hòa, thay thế p bởi )

(Luật phân phối)

(Luật thống trị)

(Luật trung hòa)

Do đó .

**Ví dụ 3.31**

Chứng minh rằng:

a.

*Hướng dẫn:*

(Luật kéo theo)

(Luật giao hoán)

(Luật phủ định của phủ định)

(Luật kéo theo)

Do đó,

b.

**Ý tưởng:**

Sử dụng công thức

Biến đổi vế trái về vế phải.

*Hướng dẫn:*

() (Sử dụng công thức XOR)

() (Luật kéo theo)

() (Luật De Morgan)

() (Luật phủ định của phủ định)

() (Luật giao hoán với phép )

() (Luật kết hợp với phép )

) (Luật phân phối)

) (Luật kết hợp)

) (Luật phần tử bù)

) (Luật thống trị)

) (Luật trung hòa)

) (Luật De Morgan)

) (Luật kết hợp)

) (Luật lũy đẳng)

(Luật kết hợp)

(Đpcm)

**Ví dụ 3.32**

a. Viết lại các phát biểu sau đây thành biểu thức logic

*“Nếu bạn chưa đủ 18 tuổi hoặc nồng độ cồn trong máu vượt quá 800 thì bạn không được lái xe máy”*

*Hướng dẫn:*

Đặt các biến mệnh đề p, q, r như sau:

*p =“Bạn chưa đủ 18 tuổi”*

*q = “Nồng độ cồn trong máu vượt quá 800”*

*r = “Bạn không được lái xe máy”*

Biểu thức logic của phát biểu trên là

b. Chứng minh biểu thức logic sau đây

là hằng đúng

*Hướng dẫn:*

Có thể chứng minh bằng 2 cách;

**Cách 1:**

(Luật kéo theo)

(Luật phân phối)

(Luật phần tử bù)

(Luật trung hòa)

(Luật kéo theo)

(Luật De Morgan)

(Luật kết hợp)

(Luật phần tử bù)

(Luật thống trị)

Do đó là một hằng đúng.

**Cách 2:**

(Luật kéo theo)

( (Luật De Morgan)

(Luật kết hợp)

(Luật De Morgan)

(Với E =

(Luật phần tử bù)

Do đó là một hằng đúng.

**Ví dụ 3.33**

Chứng minh rằng:

a. là một hằng đúng.

b. là một hằng đúng.

*Hướng dẫn:*

a. (Luật kéo theo)

(Luật kết hợp)

(Luật phần tử bù)

(Luật thống trị)

Do đó, là một hằng đúng.

b. (Luật kéo theo)

(Luật De Morgan)

(Luật kết hợp)

(Luật phần tử bù)

(Luật thống trị)

Do đó, là một hằng đúng.

**Lưu ý:**

- Đơn giản hóa biểu thức là việc làm rất hữu ích trong việc xây dựng tính logic của các chương trình và trong việc thiết kế mạch logic kỹ thuật số.

- Các luật logic có thể được sử dụng để chứng minh tính tương đương logic của hai biểu thức logic, nhưng chúng không thể sử dụng để chứng minh hai biểu thức không tương đương logic. Lúc này vẫn phải sử dụng bảng giá trị chân lý để chỉ ra sự tương đương logic của các biểu thức, mặc dù công việc này mất nhiều thời gian, trong trường hợp có nhiều biến mệnh đề.

### **3.1.4. Các quy tắc suy diễn**

#### 3.1.4.1. Định nghĩa

Suy luận dựa trên nền tảng của các phép toán logic mệnh đề. Từ các phán đoán, giả định đưa đến các chứng minh để chấp nhận hay bác bỏ một vấn đề nào đó. Để chứng minh một vấn đề nào đó, người ta thường phải xác định các giả thiết ban đầu, và các kết luận. Quá trình đi từ giả thiết đến kết luận được gọi là quá trình chứng minh, cách thức để thực thi quá trình chứng minh được gọi là phương pháp chứng minh.

Suy luận gồm có hai thành phần là giả thiết (gọi là các tiền đề) và kết luận. Tiền đề là những tri thức đã biết, hoặc được thừa nhận, là cơ sở cho suy luận, còn kết luận là tri thức được rút ra.

Ví dụ 3.34

Cho suy luận sau đây:

“Mọi kim loại đều dẫn điện

Đồng là kim loại

Do đó, đồng dẫn điện”

Xác định giả thiết và kết luận của suy luận.

Hướng dẫn:

Trong suy luận này, có hai giả thiết: “Mọi kim loại đều dẫn điện” và “Đồng là kim loại”.

Kết luận được đưa ra là “Đồng dẫn điện”

Ví dụ 3.35

Xác định giả thiết (tiền đề) và kết luận của suy luận sau đây:

“Tất cả các số chẵn đều chia hết cho 2;

64 là số chẵn

Vậy 64 chia hết cho 2”.

Hướng dẫn:

Giả thiết (tiền đề) của suy luận:

Tiền đề 1:“Tất cả các số chẵn đều chia hết cho 2”

Tiền đề 2: “64 là số chẵn”

Kết luận: “64 chia hết cho 2”.

Các phương pháp chứng minh không chỉ được áp dụng trong lĩnh vực toán học, mà còn được áp dụng nhiều trong Tin học. Chẳng hạn, kiểm tra tính đúng đắn của chương trình, xây dựng các luật suy diễn trong trong trí tuệ nhân tạo.

|  |
| --- |
| **Định nghĩa 3.10** |
| Trong các chứng minh toán học, xuất phát từ những khẳng định đúng p, q, r…(gọi là các tiền đề), ta áp dụng các quy tắc suy diễn để suy ra chân lý của một mệnh đề h (kết luận) |
| **Kiểm tra tính đúng đắn của một suy luận** |
| **Bước 1:** Xác định các tiền đề và kết luận của suy luận (Viết dưới dạng ký hiệu)  **Bước 2:** Xây dựng bảng giá trị chân lý của tất cả các tiền đề và kết luận.  **Bước 3:** Một dòng của bảng giá trị chân lý trong đó tất cả các tiền đề đều đúng gọi là dòng tiêu chí **(**critical row). Nếu có 1 dòng tiêu chí trong đó kết luận sai, thì có thể suy luận đã cho có tiền đề đúng và kết luận sai, do đó suy luận không hợp lệ. Nếu kết luận tất cả các dòng tiêu chí đúng, thì suy luận đó hợp lệ. |

**Ví dụ 3.36**

*Xác định suy luận sau đây đúng hay sai, bằng cách xây dựng bảng giá trị chân lý, trong đó chứa các cột tiêu đề và cột kết luận. Khi điền các giá trị vào bảng, chỉ cần xác định giá trị của cột kết luận ở các dòng tiêu chí.*

*Hướng dẫn:*

Lập bảng giá trị chân lý

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| p | q | r |  |  |  |  |  |  |
| T | T | T | F | T | T | T | T | T |
| T | T | F | T | T | F | T | F |  |
| T | F | T | F | F | T | F | T |  |
| T | F | F | T | T | F | T | T | F |
| F | T | T | F | T | F | T | F |  |
| F | T | F | T | T | F | T | F |  |
| F | F | T | F | F | F | T | T | T |
| F | F | F | T | T | F | T | T | T |

Khi lập bảng giá trị chân lý của các tiền đề và kết luận, ta chỉ quan tâm đến các dòng mà giá trị của các tiền đề đều đúng. Lúc đó, kiểm tra giá trị của kết luận tại các dòng đó.

Trong Ví dụ trên, dòng bốn có tiền đề đúng (T), kết luận sai. Do đó, suy luận không hợp lệ.

#### *3.1.4.2. Các luật suy diễn*

|  |
| --- |
| **Tổng quát hóa (Generalization) - (còn được gọi là luật cộng)** |
| **Cơ sở toán học**  ) |

Chứng minh tính đúng đắn của quy tắc:

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| p | q |  |
| T | T | T |
| T | F | T |
| F | T |  |
| F | F |  |

Dòng tiêu chí, tiền đề đúng, kết luận đúng. Do đó suy luận đúng.

**Ví dụ 3.37**

An là sinh viên ngành CNTT (Tiền đề)

An là sinh viên ngành CNTT hoặc An là sinh viên ngành Kinh tế (Kết luận)

|  |
| --- |
| **Chuyên biệt hóa (Specialization) – ( còn được gọi là luật rút gọn)** |
| **Cơ sở toán học** |

Chứng minh tính đúng đắn của quy tắc:

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| p | q |  | P | q |
| T | T | T | T | T |
| T | F | F |  |  |
| F | T | F |  |  |
| F | F | F |  |  |

Dòng tiêu chí, tiền đề đúng, kết luận đúng. Do đó suy luận đúng.

**Ví dụ 3.38**

Bình thích học lập trình và Bình thích Toán học (Tiền đề)

Bình thích học lập trình (Kết luận)

|  |
| --- |
| **Tam đoạn luận** |
| Suy luận chứa hai tiền đề (tiền đề thứ nhất gọi là tiền đề chính, tiền đề thứ hai gọi là tiền đề phụ) và một kết luận được gọi là tam đoạn luận. |

|  |
| --- |
| **Modus Ponens – Tam đoạn luận khẳng định** |
| **Cơ sở toán học:** |

Để chứng minh tính đúng đắn của Modus Ponens, ta lập bảng giá trị chân lý sau đây:

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| p | q |  | p | q |
| T | T | T | T | T |
| T | F | F | T |  |
| F | T | T | F |  |
| F | F | T | F |  |

Dòng tiêu chí, tiêu đề và kết luận đều đúng. Do đó, suy luận đúng.

**Ví dụ 3.39**

Nếu tổng các chữ số của 371.487 chia hết cho 3 thì 371.487 chia hết cho 3

Tổng các chữ số của 371.487 chia hết cho 3

371.487 chia hết cho 3

|  |
| --- |
| **Modus Tollens – Tam đoạn luận phủ định** |
| **Cơ sở toán học của phương pháp này:** |

Chứng minh tính đúng đắn của tam đoạn luận phủ định – quy tắc Modus Tollens:

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| p | q |  |  |  |
| T | T | T | F |  |
| T | F | F | T |  |
| F | T | T | F |  |
| F | F | T | T | T |

Dòng tiêu chí, tiêu đề và kết luận đều đúng. Do đó, suy luận đúng.

**Ví dụ 3.40**

Nếu 870.232 chia hết cho 6 thì 870.232 chia hết cho 3

870.232 không chia hết cho 3

870.232 không chia hết cho 6

|  |
| --- |
| **Tam đoạn luận rời (Quy tắc loại trừ)** |
| **Cơ sở toán học** |

Chứng minh tính đúng đắn của quy tắc:

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| p | q |  |  | p |
| T | T | T | F |  |
| T | F | T | T | T |
| F | T | T | F |  |
| F | F | F | T |  |

Chỉ quan tâm đến dòng chứa các tiền đề nhận giá trị T, giá trị tương ứng của kết luận cũng nhận giá trị T (hình trên). Do đó suy luận hợp lý.

**Ví dụ 3.41**

Giả sử cho số x thỏa mãn x – 3 = 0 hoặc x + 2 = 0

Nếu biết thêm x là số không âm, tức là x+ 2 0

Do đó, x -3 = 0

Viết dưới dạng biểu thức như sau:

(Tiền đề)

(Tiền đề)

(Kết luận)

**Ví dụ 3.42**

Cường thích đá bóng hoặc Cường thích xem bóng đá (Tiền đề)

Cường không thích xem bóng đá (Tiền đề)

Cường thích đá bóng (Kết luận)

|  |
| --- |
| **Tam đoạn luận giả định** |
| **Cơ sở toán học** |

Chứng minh tính đúng đắn của quy tắc:

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| p | q | r |  |  |  |
| T | T | T | T | T | T |
| T | T | F | T | F |  |
| T | F | T | F | T |  |
| T | F | F | F | T |  |
| F | T | T | T | T | T |
| F | T | F | T | F |  |
| F | F | T | T | T | T |
| F | F | F | T | T | T |

**Ví dụ 3.43**

Nếu 18.486 chia hết cho 18 thì chia hết cho 9.

Nếu 18.486 chia hết cho 9 thì tổng các chữ số của 18.486 chia hết cho 9.

Nếu 18.486 chia hết cho 18 thì tổng các chữ số của 18.486 chia hết cho 9.

|  |
| --- |
| **Chứng minh bằng phân chia trường hợp** |
| **Cơ sở toán học** |

Chứng minh tính đúng đắn của quy tắc:

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| p | q | r |  |  |  |  |
| T | T | T | T | T | T | T |
| T | T | F | T | F | F |  |
| T | F | T | T | T | T | T |
| T | F | F | T | F | T |  |
| F | T | T | T | T | T | T |
| F | T | F | T | T | F |  |
| F | F | T | F | T | T | T |
| F | F | F | F | T | T | T |

**Ví dụ 3.44**

x là số dương hoặc x là số âm.

Nếu x là số dương, thì x2 > 0.

Nếu x là số âm, thì x2 > 0.

x2 > 0.

|  |
| --- |
| **Quy tắc mâu thuẫn** |
| (Được dựa trên nguyên tắc: *“Nếu một giả định dẫn đến mâu thuẫn, thì giả định đó phải sai”*)  p là một mệnh đề cần kiểm tra giá trị chân lý. Nếu có thể chỉ ra rằng giả sử p là sai, dẫn đến mâu thuẫn, thì có thể kết luận p đúng.  với c là một mâu thuẫn. |

**Ví dụ 3.45**



Raymond Smullyan

Nhà logic học Raymond Smullyan (Sinh năm 1919) đưa ra một bài toán như sau:

Trên một hòn đảo có hai loại hiệp sĩ: Hiệp sĩ luôn nói sự thật, và nô lệ của họ, những kẻ luôn nói dối. Một khách du lịch đến thăm hòn đảo, và tiếp xúc với hai người bản địa A, B:

A: “B là một hiệp sĩ luôn nói thật”

B: “Tôi và A không cùng kiểu”

Hỏi A, B thuộc kiểu người nào (Luôn nói sự thật hay luôn nói dối).

Hướng dẫn:

Giả sử A là hiệp sĩ luôn nói thật.

Những gì A nói là đúng. (Theo định nghĩa của hiệp sĩ)

B cũng là một hiệp sĩ luôn nói thật. (Theo lời A nói)

Những gì B nói là đúng. (Theo định nghĩa của hiệp sĩ)

A và B thuộc hai kiểu người đối lập. (Theo lời B nói)

Từ đây xuất hiện mâu thuẫn, A và B cùng là hiệp sĩ luôn nói thật, khác với lời B nói (A, B không cùng kiểu hiệp sĩ).

Vậy giả sử sai, theo quy tắc mâu thuẫn.

A không phải hiệp sĩ luôn nói thật.

A là nô lệ, kẻ luôn nói dối (Bằng cách loại trừ: tất cả cư dân của hòn đảo, chỉ thuộc vào một trong 2 kiểu: hiệp sĩ luôn nói thật và nô lệ luôn nói dối, A không phải hiệp sĩ luôn nói thật, do vậy A là nô lệ luôn nói dối)

Những gì A nói không đúng (Theo định nghĩa của nô lệ)

B không phải hiệp sĩ luôn nói thật

B là nô lệ luôn nói dối

Vậy A, B cùng là những nô lệ luôn nói dối.

**Bảng 3.7:** Tổng hợp các quy tắc suy diễn

|  |  |
| --- | --- |
| **Tên luật** | **Quy tắc** |
| **Tổng quát hóa (Generalization)**  **(Quy tắc cộng)** |  |
| **Chuyên biệt hóa (Specialization)**  **( Quy tắc rút gọn)** |  |
| **Modus Ponens**  **Quy tắc khẳng định** |  |
| **Modus Tollens**  **Quy tắc phủ định** |  |
| **Tam đoạn luận rời**  **(Quy tắc loại trừ)** |  |
| **Tam đoạn luận giả định** |  |
| **Quy tắc mẫu thuẫn** | với c là một mâu thuẫn |

**Ví dụ 3.46**

Bạn đang chuẩn bị đi học vào buổi sáng, và phát hiện ra rằng bạn đã để quên kính ở đâu đó.

Các phát biểu sau đây là đúng:

*Nếu tôi đọc báo trong bếp, thì kính của tôi ở trên bàn bếp*

*Nếu kính của tôi ở bàn bếp thì tôi đã nhìn thấy vào bữa ăn sáng*

*Tôi đã không nhìn thấy kính của mình tại bữa ăn sáng*

*Tôi đã đọc báo ở phòng khách, hoặc tôi đã đọc báo ở bếp*

*Nếu tôi đọc báo ở phòng khách, thì kính của tôi ở trên mặt bàn phòng khách.*

Vậy kính của tôi đã ở đâu?

*Hướng dẫn:*

Thiết lập các biến mệnh đề trong các phát biểu như sau:

p = *“Tôi đọc báo trong bếp”*

q = *“Kính của tôi ở trên bàn ăn”*

r = *“Tôi nhìn thấy kính vào bữa ăn sáng”*

t = *“Tôi đọc báo ở phòng khánh”*

s = *“Kính của tôi ở trên mặt bàn phòng khách”*

Từ giả thiết của đề bài, ta có các biểu thức sau đây:

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| **Phát biểu** | **Biểu thức** |  |
| *Nếu tôi đọc báo trong bếp, thì kính của tôi ở trên bàn bếp* |  | *(a)* |
| *Nếu kính của tôi ở bàn bếp thì tôi đã nhìn thấy vào bữa ăn sáng* |  | *(b)* |
| *Tôi đã không nhìn thấy kính của mình tại bữa ăn sáng* |  | *(c)* |
| *Tôi đã đọc báo ở phòng khách, hoặc tôi đã đọc báo ở bếp* |  | *(d)* |
| *Nếu tôi đọc báo ở phòng khách, thì kính của tôi ở trên mặt bàn phòng khách.* |  | *(e)* |

Sau đây là 1 chuỗi các bước bạn có thể sử dụng để đạt được câu trả lời, sử dụng các quy tắc cho phép rút ra các kết luận của từng bước:

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| **Bước** | **Tiền đề và Kết luận** | **Quy tắc sử dụng** |
| 1 |  | (a)  (b)  *Tam đoạn luận giả định* |
| 2 |  | Kết luận của bước 1  (c)  Modus Tollens |
| 3 |  | (d)  Kết luận của bước 2  *Tam đoạn luận rời* |
| 4 |  | (e)  Kết luận của bước 3  Modus Ponens |

Kết luận cuối cùng: *“Kính đang ở mặt bàn phòng khách”*

**Ví dụ 3.47**

*(Tham khảo Bài tập trang 19 của giáo trình Toán rời rạc, GS.TS Nguyễn Hữu Anh, NXB Lao Động [1])*

Cho các suy luận sau đây:

*Nếu nghệ sĩ Trương Ba không trình diễn hay số vé bán ra ít hơn 50 vé thì đêm diễn sẽ bị hủy bỏ và ông bầu sẽ rất buồn*

*Nếu đêm diễn bị hủy bỏ thì tiền vé phải trả lại cho người xem*

*Nhưng tiền vé đã không trả lại cho người xem*

*Vậy nghệ sĩ Trương Ba đã trình diễn.*

Kiểm tra tính đúng đắn của suy luận trên.

*Hướng dẫn:*

Thiết lập các biến mệnh đề sau đây:

*p = “Nghệ sĩ Trương Ba đã trình diễn”*

*q = “Số vé bán ra ít hơn 50 vé”*

*r = “Đêm diễn bị hủy”*

*t = “Ông bầu rất buồn”*

*s = “Tiền vé phải trả lại cho người xem”*

Cần kiểm tra các suy luận sau đây:

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| **Phát biểu** | **Biểu thức** |  |
| *Nếu nghệ sĩ Trương Ba không trình diễn hay số vé bán ra ít hơn 50 vé thì đêm diễn sẽ bị hủy bỏ và ông bầu sẽ rất buồn* |  | *(a)* |
| *Nếu đêm diễn bị hủy bỏ thì tiền vé phải trả lại cho người xem* |  | *(b)* |
| *Nhưng tiền vé đã không trả lại cho người xem* |  | *(c)* |
| *Kết luận: Vậy nghệ sĩ Trương Ba đã trình diễn* |  | *(d)* |

Suy luận cần chứng minh là:

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| **Bước** | **Tiền đề và Kết luận** | **Quy tắc sử dụng** |
| 1 |  | Tiền đề (a)  *Chuyên biệt hóa*  *Tiền đề (b)*  *Tam đoạn luận giả định mở rộng* |
| 2 |  | Kết luận của bước 1  Tiền đề (c)  Modus Tollens và luật De Morgan |
| 3 | Có | Kết luận của bước 2  *Chuyên biệt hóa*  Modus Ponens |

Suy luận trên đúng.

**Ví dụ 3.48**

*Để chỉ ra suy luận đúng, chúng ta sẽ sử dụng các luật suy diễn để từ các tiền đề đi đến kết luận cuối cùng. Trong trường hợp để chỉ ra suy luận sai, chỉ cần đưa ra một phản Ví dụ cụ thể.*

a. Giả sử có các tiền đề sau đây

*“Trời không nắng và trời lạnh”*

*“Chúng ta bơi chỉ khi trời nắng”*

*“Nếu chúng ta không bơi thì chúng ta sẽ đi bằng ca nô”*

*“Nếu chúng ta đi ca nô, thì chúng ta sẽ về nhà sớm”*

Sử dụng các quy tắc suy diễn, chứng minh từ các tiền đề trên sẽ dẫn tới kết luận:*“Chúng ta sẽ về nhà sớm”*

*Hướng dẫn:* Thiết lập các biến mệnh đề sau:

p = *“Trời nắng”*

q = *“Trời lạnh”*

r = *“Chúng ta sẽ bơi”*

t = *“Chúng ta đi bằng ca nô”*

k = *“Chúng ta về nhà sớm”*

Các tiền đề và kết luận được biểu diễn qua biểu thức logic

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| **Phát biểu** | **Biểu thức** |  |
| *“Trời không nắng và trời lạnh”* |  | *(a)* |
| *“Chúng ta bơi chỉ khi trời nắng”* |  | *(b)* |
| *“Nếu chúng ta không bơi thì chúng ta sẽ đi bằng ca nô”* |  | *(c)* |
| *“Nếu chúng ta đi ca nô, thì chúng ta sẽ về nhà sớm”* |  | *(d)* |
| *Kết luận: “Chúng ta về nhà sớm”* |  | *(e)* |

Trình tự các bước để từ tiền đề đi đến kết luận

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| **Bước** | **Tiền đề và Kết luận** | **Quy tắc sử dụng** |
| 1 |  | Tiền đề (a)  *Đơn giản hóa* |
| 2 |  | Tiền đề (b)  Kết luận của bước 1  Modus Tollens |
| 3 |  | Tiền đề (c)  Kết luận của bước 2  Modus Ponens |
| 4 | t | Tiền đề (d)  Kết quả của bước 3  Modus Ponens |

Kết luận: Suy luận trên đúng.

b. Suy luận sau đây đúng hay sai?

*“Nếu bò sữa nhiều và sữa tốt thì sẽ được cho ăn thêm nhiều cỏ non. Bò ăn thêm nhiều cỏ non thì sẽ mập lên. Nhưng thực tế bò không mập lên”.*

Kết luận: *“Bò không cho nhiều sữa hoặc không cho sữa tốt”.*

*Hướng dẫn:*

Thiết lập các biến mệnh đề sau đây:

p = *“Bò nhiều sữa”*

q *= “Bò cho sữa tốt”*

t = *“Bò được ăn thêm nhiều cỏ non”*

u *= “Bò mập lên”*

Các tiền đề và kết luận của suy luận được biểu diễn thông qua các biểu thức logic sau đây:

|  |  |
| --- | --- |
| **Phát biểu** | **Biểu thức logic** |
| *Nếu bò sữa nhiều và sữa tốt thì sẽ được cho ăn thêm nhiều cỏ non* | Tiền đề (a) |
| *Bò ăn thêm nhiều cỏ non thì sẽ mập lên* | Tiền đề (b) |
| *Nhưng thực tế bò không mập lên.* | Tiền đề (c) |
| *Kết luận bò không cho nhiều sữa hoặc không cho sữa tốt.* | Kết luận |

Trình tự các bước để kiểm tra kết luận đúng hay sai như sau:

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| **Bước** | **Tiền đề và Kết luận** | **Quy tắc sử dụng** |
| 1 |  | Tiền đề (a)  Tiền đề (b)  *Tam đoạn luận giả định* |
| 2 |  | Kết luận của bước 1  Tiền đề (c)  Modus Ponens |
| 3 |  | Kết luận của bước 2  Luật De Morgan |

Kết luận: Suy luận trên là đúng.

c. Suy luận sau đúng hay sai? Vì sao?

*( Ví dụ được tham khảo từ giáo trình Toán rời rạc của GS. TS Nguyễn Hữu Anh, trang 25, NXB Lao Động [1])*

*“Ông Minh đã khẳng định rằng nếu không được tăng lương thì ông sẽ nghỉ việc. Mặt khác nếu ông ta nghỉ việc và vợ ông ta bị mất việc thì phải bán xe. Biết rằng nếu vợ ông Minh hay đi làm trễ thì sẽ mất việc. Cuối cùng ông đã được tăng  
lương. Vậy suy ra nếu ông Minh không bán xe thì vợ ông không đi làm trễ”.*

*Hướng dẫn:*

Thiết lập các biến mệnh đề sau đây:

p *= “Ông Minh được tăng lương”*

q = *“Ông Minh nghỉ việc”*

t *= “Vợ ông Minh mất việc”*

r *= “Ông Minh bán xe”*

u = *“Vợ ông Minh hay đi làm trễ”*

Tiền đề và kết luận của suy luận được biểu diễn thông qua các biểu thức logic sau đây:

|  |  |
| --- | --- |
| **Phát biểu** | **Biểu thức logic** |
| *Ông Minh đã khẳng định rằng nếu không được tăng lương thì ông sẽ nghỉ việc* | Tiền đề (a) |
| *Mặt khác nếu ông ta nghỉ việc và vợ ông ta bị mất việc thì phải bán xe.* | Tiền đề (b) |
| *Biết rằng nếu vợ ông Minh hay đi làm trễ thì sẽ mất việc.* | Tiền đề (c) |
| *Cuối cùng ông đã được tăng lương* | Tiền đề (d) |
| *Vậy suy ra nếu ông Minh không bán xe thì vợ ông không đi làm trễ.* | Kết luận |

Ta đưa ra phản ví dụ, chứng tỏ các tiền đề đúng nhưng kết luận sai.

Kết luận sai khi đúng và sai. Do đó r sai và u đúng, tức là “*Ông Minh không bán xe*” và *“Vợ ông Minh hay đi làm trễ”*

Để tiền đề (c) đúng khi u đúng thì t phải đúng

Để tiền đề (b) đúng khi r sai thì phải sai. Do t đúng, nên q phải sai

Để tiền đề (a) và tiền đề (d) p đúng thì p phải đúng

Do đó ta có thể đưa ra 1 phản ví dụ (p = T, q = F, t = T, r = F, u = T) để cho các tiền đề nhận giá trị đúng, nhưng kết luận sai

Có thể kết luận suy luận trên không đúng.

**Ví dụ 3.49**

a. Kiểm tra suy luận sau:

*Hướng dẫn:*

Sử dụng các quy tắc suy diễn, từ các tiền đề dẫn đến kết luận. Trình tự các bước suy luận như sau:

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| **Bước** | **Tiền đề và Kết luận** | **Quy tắc sử dụng** |
| 1 |  | (b) Tiền đề  (d) Tiền đề  *Tam đoạn luận rời* |
| 2 |  | (a) Tiền đề  Kết luận của bước 1  Modus Ponens |
| 3 |  | (c) Tiền đề  Kết luận của bước 2  Tam đoạn luận giả định |

Do đó suy luận đã cho đúng.

b. Chứng tỏ suy luận sau đây đúng

*Hướng dẫn:*

Trình tự các bước để từ các tiền đề đi đến kết luận cuối cùng:

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| **Bước** | **Tiền đề và Kết luận** | **Quy tắc sử dụng** |
| 1 |  | Tiền đề (d)  *Luật De Morgan* |
| 2 |  | Kết luận của bước 1  Quy tắc rút gọn |
| 3 |  | Tiền đề (d)  Kết luận của bước 2  Modus Tollens |
| 4 |  | Kết quả của bước 2  Kết quả của bước 3  Phép toán nối liền |
| 5 |  | Kết quả của bước 4  Luật De Morgan |
| 6 |  | Tiền đề (b)  Kết quả của bước 5  Modus Tollens |
| 7 |  | Tiền đề (c)  Kết quả của bước 6  Modus Tollens |
| 8 | p | Kết quả của bước 7 và De Morgan  Quy tắc rút gọn |

### **3.1.5. Các dạng chuẩn tắc**

|  |
| --- |
| **Định nghĩa 3.11** |
| Dạng chuẩn tắc của một biểu thức logic là sự biểu diễn biểu thức về dạng đơn giản, chỉ bao gồm các phép toán của các biến mệnh đề. |

**Ví dụ 3.50**

Một số ví dụ về dạng chuẩn tắc.

*Hướng dẫn:*

a. E(p, q) =

b. F(p, q, r) =

c. G(p, q, r) =

#### *3.1.5.1. Chuẩn tắc tuyển*

|  |
| --- |
| **Định nghĩa 3.12** |
| Giả sử p1, p1, p3, …, pn là các biến mệnh đề.  Một biểu thức logic F(p1, p1, p3, …, pn) theo các biến mệnh đề được gọi là hội cơ bản, nếu nó có dạng:  F(p1, p1, p3, …, pn) = q1 q2 q3… qn  Trong đó qi = pi hoặc qi = , với mọi i = . |

**Ví dụ 3.51**

Xác định các hội cơ bản theo ba biến mệnh đề p, q, r.

*Hướng dẫn:*

Với 3 biến mệnh đề, ta xác định được tám hội cơ bản sau đây:

F1(p, q, r) =

F2(p, q, r) =

F3(p, q, r) =

F4(p, q, r) =

F5(p, q, r) =

F6(p, q, r) =

F7(p, q, r) =

F8(p, q, r) = là các hội cơ bản theo các biến p, q, r.

|  |
| --- |
| **Định nghĩa 3.13** |
| Biểu thức E(p1, p1, p3, …, pn) theo các biến mệnh đề p1, p1, p3, …, pn được gọi là chuẩn tắc tuyển, nếu E có dạng E =, trong đó Ei là các hội cơ bản, i = |

**Ví dụ 3.52**

- E(p, q, r) = là một chuẩn tắc tuyển với ba biến mệnh đề p, q, r.

**-** H(x, y) = ( ( ( ( là một chuẩn tắc tuyển của hai biến x, y.

#### *3.1.5.2. Chuẩn tắc hội.*

|  |
| --- |
| **Định nghĩa 3.14** |
| Giả sử p1, p1, p3, …, pn là các biến mệnh đề.  Một biểu thức logic F(p1, p1, p3, …, pn) theo các biến mệnh đề được gọi là tuyển cơ bản, nếu nó có dạng:  F(p1, p1, p3, …, pn) = q1 q2 q3… qn  Trong đó qi = pi hoặc qi = , với mọi i = . |

**Ví dụ 3.53**

Xác định các tuyển cơ bản theo ba biến mệnh đề p, q, r.

*Hướng dẫn:*

Với 3 biến mệnh đề, ta xác định được tám tuyển cơ bản sau đây:

F1(p, q, r) =

F2(p, q, r) =

F3(p, q, r) =

F4(p, q, r) =

F5(p, q, r) =

F6(p, q, r) =

F7(p, q, r) =

F8(p, q, r) = là các tuyển cơ bản theo các biến p, q, r.

|  |
| --- |
| **Định nghĩa 3.15** |
| Biểu thức E(p1, p1, p3, …, pn) theo các biến mệnh đề p1, p1, p3, …, pn được gọi là chuẩn tắc hội, nếu E có dạng E =, trong đó Ei là các hội cơ bản, i = |

**Ví dụ 3.54**

E(p, q, r)= là chuẩn tắc hội theo 3 biến mệnh đề p, q, r.

#### *3.1.5.3. Tìm chuẩn tắc hội hoặc chuẩn tắc tuyển của một biểu thức logic.*

|  |
| --- |
| **Tìm chuẩn tắc hội hoặc chuẩn tắc tuyển của một biểu thức logic** |
| **Input:** Bảng giá trị chân lý  **Output:** Chuẩn tắc tuyển hoặc chuẩn tắc hội  **Trình tự các bước để xác định dạng chuẩn tắc**  Cho biểu thức E(p1, p1, p3, …, pn) theo các biến mệnh đề p1, p1, p3, …, pn  **Bước 1:** Xây dựng bảng giá trị chân lý cho biểu thức E  **Bước 2:** Xét các trường hợp xảy ra với bảng giá trị chân lý.  *Trường hợp 2.1:* Trên các dòng của bảng giá trị chân lý, số dòng T (True) ít hơn số dòng F (False) (Có thể nói E không phải hằng sai)  *Bước 2.1.1. Tìm các hội của pi và có giá trị T theo từng dòng tương ứng với các dòng mà biểu thức E nhận giá trị T (pi , là giá trị của các biến mệnh* đề *p1, p1, p3, …, pn )*  *Bước 2.1.2. Lấy tuyển của các hội này ta thu được biểu thức E, chính là chuẩn tắc tuyển cần tìm.*  *Trường hợp 2.2:* Trên các dòng của bảng giá trị chân lý, số dòng F (False) ít hơn số dòng T (True) (Có thể nói E không phải là hằng đúng)  *Bước 2.2.1. Tìm các tuyển của pi và có giá trị F theo từng dòng tương ứng với các dòng mà biểu thức E nhận giá trị F (pi , là giá trị của các biến mệnh* đề *p1, p1, p3, …, pn )*  *Bước 2.2.2. Lấy hội của các tuyển này ta thu được biểu thức E, chính là chuẩn tắc hội cần tìm.*  *Trường hợp 2.3: Nếu số dòng T và số dòng F của biểu thức E bằng nhau, thì có thể xác định chuẩn tắc hội hoặc chuẩn tắc tuyển theo số dòng F hoặc số dòng T.* |

**Ví dụ 3.55**

Chuyển biểu thức sau sang chuẩn tắc hội hoặc chuẩn tắc tuyển.

*Hướng dẫn:*

*a. Xây dựng bảng giá trị chân lý cho biểu thức E(p, q, r) =*

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| p q r |  |  |  | **Tuyển cơ bản** |
| T T T | T | F | F |  |
| T T F | T | F | F |  |
| T F T | F | F | T |  |
| T F F | F | F | T |  |
| F T T | F | T | T |  |
| F T F | F | F | T |  |
| F F T | T | T | T |  |
| F F F | T | F | F |  |

Bảng giá trị chân lý của biểu thức E có 8 dòng, trong đó có 3 dòng E nhận giá trị F, và 5 dòng còn lại E nhận giá trị T. Chúng ta chỉ quan tâm đến 3 dòng E nhận giá trị F.

Tại các dòng này ta xác định các tuyển cơ bản của các biến p, q, r.

Do đó, theo thuật toán đã trình bày ở trên, biểu thức E có thể viết dưới dạng chuẩn tắc hội như sau:

E =

**Ví dụ 3.56**

Tìm chuẩn tắc hội hoặc chuẩn tắc tuyển của biểu thức E(p, q) có bảng chân trị sau đây:

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| **p** | **q** | **E(p, q)** |
| T | T | T |
| T | F | F |
| F | T | F |
| F | F | T |

*Hướng dẫn:*

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| **p** | **q** | **E(p, q)** | **Hội cơ bản** | **Tuyển cơ bản** |
| T | T | T |  |  |
| T | F | F |  |  |
| F | T | F |  |  |
| F | F | T |  |  |

E(p, q) viết ở dạng chuẩn tắc tuyển:

E(p, q) =

E(p, q) viết ở dạng chuẩn tắc hội:

E(p, q) =

**Ví dụ 3.57**

Xác định dạng chuẩn tắc của biểu thức E(p, q, r) theo 3 biến mệnh đề p, q, r, được cho bởi bảng giá trị chân lý sau đây:

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| p | q | r | E(p, q, r) |
| T | T | T | T |
| T | T | F | F |
| T | F | T | F |
| T | F | F | T |
| F | T | T | F |
| F | T | F | F |
| F | F | T | T |
| F | F | F | F |

*Hướng dẫn:*

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| **p** | **q** | **r** | **E(p, q, r)** | **Hội cơ bản** |
| T | T | T | T |  |
| T | T | F | F |  |
| T | F | T | F |  |
| T | F | F | T |  |
| F | T | T | F |  |
| F | T | F | F |  |
| F | F | T | T |  |
| F | F | F | F |  |

Do đó, E(p, q, r) được biểu diễn ở dạng chuẩn tắc tuyển như sau:

E(p, q, r) =

**Lưu ý:**

Ngoài cách sử dụng bảng giá trị chân lý, trong một số trường hợp các thể sử dụng phép biến đổi tương đương, sử dụng các luật logic đã biết.

- Khử phép kéo theo, phép kéo theo 2 chiều bằng luật kéo theo và tương đương

**Luật kéo theo:**

**Luật tương đương:**

- Khử phép phủ định bằng luật De Morgan

**Luật De Morgan:**

- Kết hợp các luật khác để làm xuất hiện các hội cơ bản hoặc các tuyển cơ bản.

**Ví dụ 3.58**

Sử dụng các luật logic, xác định dạng chuẩn tắc của biểu thức sau đây:

E(p, q, r) =

*Hướng dẫn:*

E(p, q, r) =

Khử phép tương đương:

Khử phép kéo theo trong từng vế:

Tiếp tục khử phép kéo theo trong từng vế của biểu thức:

Sử dụng luật De Morgan để khử phép phủ định:

Sử dụng luật kết hợp:

Sử dụng luật phân phối biến đổi biểu thức:

Sử dụng luật phần tử bù, thay thế bởi T:

Sử dụng luật trung hòa:

Sử dụng luật kết hợp:

Vậy E(p, q, r) = là dạng chuẩn tắc hội.

### **3.1.6. Logic vị từ**

Nội dung của phần trước, chúng ta đã thảo luận về phân tích logic của các biểu thức đơn giản, và biểu thức logic phức hợp của các mệnh đề, với các phép toán . Quá trình phân tích như vậy làm sáng tỏ nhiều khía cạnh lý luận của con người, nhưng nó không được sử dụng để xác định tính hợp lệ trong phần lớn các tình huống hàng ngày và toán học. Chẳng hạn, xem xét phát biểu sau:

*“Tất cả mọi người đều phải chết*

*Socrates là người*

*Socrates sẽ phải chết”*

Về cảm nhận, phát biểu trên là đúng, tuy nhiên tính hợp lệ của nó không thể được xác định thông qua các logic mệnh đề đã đề cập ở phần trước đây. Để xác định được tính hợp lệ của phát biểu nêu trên, chúng ta cần tách mỗi phát biểu thành nhiều thành phần giống như cách chúng ta tách câu thành chủ ngữ và vị ngữ.

Logic vị từ là mở rộng của logic mệnh đề, cho phép mô tả thế giới với các đối tượng, các thuộc tính của đối tượng và các mối quan hệ giữa các đối tượng. Logic vị từ sử dụng các biến đối tượng để chỉ các đối tượng trong một miền đối tượng nào đó. Để mô tả các thuộc tính của đối tượng, các quan hệ giữa các đối tượng, trong logic vị từ, người ta đưa vào các vị từ. Ngoài các kết nối logic như trong logic mệnh đề, logic vị từ còn sử dụng các lượng từ.

#### *3.1.6.1. Vị từ*

|  |
| --- |
| **Định nghĩa 3.16** |
| Vị từ là một khẳng định p(x, y,…), trong đó x, y, v.v. là các biến thuộc tập hợp A, B, v.v. cho trước sao cho:  - p(x, y,…) không phải mệnh đề  - Nếu thay x, y, v.v. bằng các giá trị cụ thể thì p(x, y,…) là mệnh đề. |

|  |
| --- |
| **Định nghĩa 3.17** |
| Cho các vị từ p(x), q(x) theo biến x. Khi đó  + Phủ định của p(x), ký hiệu là là một vị từ mà khi thay thế x bởi một phần tử cố định a ta thu được mệnh đề  + Các phép hội, tuyển, kéo theo, kéo theo hai chiều của hai vị từ p(x) và q(x), ký hiệu bởi , , , cũng là các vị từ theo biến x, mà khi thay x bởi phần tử cố định a ta được các mệnh đề , , , . |

**Ví dụ 3.60**

a. Phát biểu *“n là số chẵn”* là một vị từ. Khi gán n với các giá trị cụ thể, ta có một mệnh đề có giá trị đúng hoặc sai. Chẳng hạn với n = 2, 4, 6, v.v. mệnh đề thu được có giá trị đúng. Với n = 1, 3, 5, v.v. mệnh đề thu được có giá trị sai.

Vị từ *“n là số chẵn”* có hai phần. Thành phần thứ nhất là biến x là chủ ngữ của câu, thành phần thứ hai *“số chẵn”* là vị ngữ của câu, cho biết tính chất của chủ ngữ.

Ký hiệu p(n) = *“n là số chẵn”.*

b. p(x) = *“n là số nguyên tố”* là một vị từ theo biến n

Với các giá trị 2, 3, 5, 7, 11, 13, v.v. ta có các mệnh đề p(2), p(3), p(5), p(7), p(11), p(13), v.v. nhận giá trị đúng;

Với các giá trị 4, 6, 8, 9, 12, 14, 15, v.v. ta có các mệnh đề p(4), p(6), p(8), p(9), p(14), p(15), v.v. nhận giá trị sai.

c. Các phát biểu có liên quan đến các biến như kiểm tra giá trị của biến “x > 5”, hay “x + y = 5” thường gặp trong các chương trình. Các phát biểu này có giá trị chân lý đúng hay sai tùy thuộc vào sự thay đổi giá trị của các biến x, y. Nói cách khác, vị từ có thể được xem là hàm mệnh đề có nhiều biến hoặc không có biến nào, có thể đúng hoặc sai tùy thuộc vào giá trị của các biến và lập luận của vị từ.

#### *3.1.6.2. Lượng từ*

Chuyển các phát biểu từ ngôn ngữ tự nhiên sang các biểu thức logic là nhiệm vụ quan trọng trong toán học, lập trình logic, trí tuệ nhân tạo, công nghệ phần mềm và nhiều ngành học khác. Trong phần logic mệnh đề, chúng ta đã đề cập đến vấn đề này, tuy nhiên trong các phát biểu đó, chúng ta cố tình không đề cập đến vị ngữ và định lượng. Trong thực tế, việc chuyển các phát biểu từ ngôn ngữ tự nhiên sang các biểu thức logic sẽ phức tạp hơn nhiều khi cần định lượng. Chúng ta sẽ cùng nhau xem xét các phát biểu sử dụng một bộ định lượng duy nhất và những phát biểu phức tạp có chứa nhiều định lượng, cố gắng biểu diễn chúng thành các biểu thức logic đơn giản và hữu ích.

|  |
| --- |
| **Định nghĩa 3.18** |
| Cho vị từ p(x), xét trên tập hợp A.  Lượng từ “*với mọi*” của p(x) được thể hiện: “*p(x) đúng với mọi giá trị x thuộc A*”, ký hiệu  Lượng từ “*tồn tại*” của p(x) được thể hiện *“tồn tại x thuộc A sao cho p(x) đúng”*, ký hiệu |

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| **Phát biểu** | **Đúng** | **Sai** |
|  | P(x) đúng với mọi giá trị x | Có một giá trị x làm cho P(x) sai |
|  | Có một giá trị x để P(x) đúng | P(x) sai với mọi giá trị của x |

**Lưu ý:**

- Khi tất cả các phần tử của miền giá trị có thể liệt kê dưới dạng x1, x2, x3,…, xn, v.v. thì lượng từ có thể được biểu diễn dưới dạng sau đây:

- Tương tự, lượng từ cũng có thể biểu diễn dưới dạng sau đây:

, bởi vì phép tuyển này đúng khi một trong các P(x1), P(x2), P(x3),…, P(xn),… đúng

**Ví dụ 3.61**

a. Với mọi số thực x, y ta luôn có x + y = y + x, có thể được biểu diễn:

b**.** Xét A ={1, 2, 3, 4} xem xét phát biểu sau:

Chứng tỏ phát biểu trên luôn đúng.

*Hướng dẫn:*

Kiểm tra biếu thức với tất cả các giá trị x thuộc A.

Ta thấy rằng , , , .

Do đó, phát biểu đúng.

c. Đặt P(x) = “x+1 > x”, xác định giá trị của lượng từ với x

*Hướng dẫn:*

Bởi vì P(x) luôn đúng với mọi giá trị của x nên lượng từ đúng.

d. Đưa ra một Ví dụ để phát biểu sai.

*Hướng dẫn:*

Lấy x = , x là số thực và (

Do đó phát biểu sai

e. Xem xét phát biểu: sao cho m2 = m

Chứng tỏ phát biểu trên đúng.

*Hướng dẫn:*

Dễ dàng thấy với m = 1 thì m2 = m = 1. Do đó “m2 = m” đúng với ít nhất một giá trị nguyên m.

Do đó phát biểu sao cho m2 = m đúng.

f. Xét tập A ={3, 4, 5} và phát biểu sao cho m2 = m

Chứng tỏ rằng phát biểu trên sai.

*Hướng dẫn:*

Dễ dàng thấy 32 = 9, 42 = 16 4 và 52 = 25 5

Do đó không tồn tại m thuộc A để m2 = m thỏa mãn

Hay phát biểu sao cho m2 = m sai.

**Ví dụ 3.62**

a. Thể hiện phát biểu *“Mỗi sinh viên trong lớp học này đã học toán rời rạc”* bằng vị từ và lượng từ.

Đầu tiên, chúng ta cần viết lại phát biểu để xác định rõ các lượng từ thích hợp được sử dụng. Kết quả chúng ta thu được:

*“Với mỗi sinh viên của lớp học này, sinh viên đó đã học toán rời rạc”*

Sử dụng biến x để phát biểu được viết *“Với mỗi sinh viên x của lớp học này, sinh viên x đã học toán rời rạc”*

Sử dụng C(x) = *“x đã học toán rời rạc”.* Nếu miền giá trị x là tất cả các sinh viên trong lớp học, chúng ta chuyển phát biểu ban đầu thành .

b. Thể hiện phát biểu *“Mỗi sinh viên trong lớp đều đăng ký học môn toán rời rạc hoặc nhập môn cơ sở dữ liệu”* bằng vị từ và lượng từ.

Tương tự với cách biểu diễn ở câu a, đặt P(x) = *“x là sinh viên trong lớp”*

Đặt Q(x) = *“x đăng ký môn toán rời rạc”*

Đặt H(x) = *“x đăng ký nhập môn cơ sở dữ liệu”*

Phát biểu trên được biểu diễn qua biểu thức lượng từ

#### *3.1.6.3. Luật De Morgan với các lượng từ*

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| **Luật De Morgan cho các lượng từ** | | |
| **Phát biểu** | **Phát biểu tương đương** | **Diễn giải** |
|  |  | đúng khi: với mọi giá trị của x, P(x) luôn sai;  sai khi: có một giá trị cụ thể nào đó của x làm cho P(x) đúng. |
|  |  | đúng khi: có một giá trị của x làm cho P(x) sai;  sai khi: P(x) đúng với mọi giá trị của x. |

**Ví dụ 3.63**

Viết phủ định cho các phát biểu sau đây:

a. *“Có một chính trị gia trung thực”*

*Hướng dẫn:*

Đặt P(x) = *“x trung thực”.* Do đó phát biểu *“Có một chính trị gia trung thực”* được biểu diễn bởi lượng từ , trong đó miền giá trị là tập hợp các chính trị gia.

Phủ định của phát biểu trên theo quy tắc De Morgan áp dụng cho các lượng từ là

có thể được diễn đạt dưới dạng phát biểu như sau:*“Tất cả các chính trị gia không trung thực”* hoặc *“Không phải tất cả các chính trị gia đều trung thực”*

b. *“Tất cả người dân Mỹ đều ăn pho mai”*

*Hướng dẫn:*

Đặt Q(x) = *“x ăn pho mai”*. Do đó phát biểu *“Tất cả người dân Mỹ đều ăn pho mai”* được biểu diễn bởi lượng từ , trong đó miền giá trị là tập hợp những người dân của nước Mỹ.

Phủ định của lượng từ trên theo quy tắc De Morgan áp dụng cho các lượng từ là

có thể được diễn đạt dưới dạng phát biểu sau đây: *“Một số người dân Mỹ không ăn pho mai”*

**Ví dụ 3.64**

Viết phủ định của các phát biểu sau đây:

a.

b.

*Hướng dẫn:*

*a.* Phủ định của là

Áp dụng quy tắc De Morgan

b. Phủ định của là

Áp dụng quy tắc De Morgan

**Ví dụ 3.65**

Chứng tỏ rằng: và tương đương logic

*Hướng dẫn:*

Áp dụng quy tắc De Morgan:

#### *3.1.6.4. Định lý áp dụng với các lượng từ hai biến*

|  |
| --- |
| **Định lý 3.1** |
| Nếu p(x,y) là một vị từ theo hai biến x, y thì các mệnh đề sau đây đúng: |

#### *3.1.6.5. Quy tắc suy luận với các lượng từ*

Dưới đây là liệt kê các quy tắc suy luận với các lượng từ được sử dụng để kiểm tra tính hợp lệ của các phát biểu:

|  |  |
| --- | --- |
| **Quy tắc** | **Ý nghĩa** |
| **Universal instantiation** | **Universal instantiation** là một quy tắc suy luận, thể hiện rằng nếu tiền đề đúng thì kết luận được đưa ra là p(c) đúng với mọi phần tử c thuộc miền giá trị. |
| **Universal generalization** | **Universal generalization** được sử dụng khi chúng ta cần chỉ ra rằng đúng bằng cách lấy ra phần tử bất kỳ c tùy ý từ miền giá trị và chỉ ra rằng p(c) đúng. Phần tử c được chọn phải là phần tử tùy ý chứ không phải là phần tử cụ thể thuộc miền. |
| **Existential instantiation** | **Existential instantiation** thể hiện rằng nếu tiền đề đúng, thì chúng ta có thể chỉ ra 1 phần tử c thuộc miền giá trị để p(c) nhận giá trị đúng |
| **Existential generalization** | **Existential generalization** thể hiện nếu có một giá trị c thuộc miền giá trị để p(c) đúng thì có thể kết luận đúng |

**Ví dụ 3.66**

Chứng tỏ suy luận sau đây đúng:

*“Mọi sinh viên trong lớp học toán rời rạc này đã tham gia khóa học về khoa học máy tính”*

*“Nam là sinh viên của lớp học toán rời rạc”*

Suy ra *“Nam tham gia khóa học khoa học máy tính”*

*Hướng dẫn:*

Đặt D(x) = *“Sinh viên x trong lớp học toán rời rạc”;*

C(x) = *“Sinh viên x tham gia khóa học khoa học máy tính”;*

Các tiền đề được suy ra từ phát biểu trên:

D(Nam)

Kết luận: C(Nam)

Trình tự các bước để từ các tiền đề đi đến kết luận

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| **Bước** | **Tiền đề và Kết luận** | **Quy tắc sử dụng** |
| 1 |  | Tiền đề  *Chuyên biệt hóa phổ dụng* |
| 2 | D(Nam) | Kết luận của bước 1  Tiền đề  *Modus Tollens* |

Suy luận đúng, hay *“Nam tham gia khóa học khoa học máy tính”.*

**Ví dụ 3.67**

Chứng tỏ rằng từ các tiền đề:

*“Một số sinh viên trong lớp này chưa đọc sách toán rời rạc”*

*“Mọi sinh viên đều vượt qua kỳ thi đầu tiên”*

Đưa đến kết luận sau đây:

*“Một số sinh viên đã vượt qua kỳ thi đầu tiên nhưng chưa đọc cuốn sách toán rời rạc”*

*Hướng dẫn:*

Đặt C(x) = “x là sinh viên trong lớp học”, B(x) = “ x đã đọc sách toán rời rạc”

P(x) = “x vượt qua kỳ thi đầu tiên”

Các tiền đề được thể hiện như sau:

|  |  |
| --- | --- |
| **Phát biểu** | **Biểu thức** |
| *“Một số sinh viên trong lớp này chưa đọc sách toán rời rạc”* | ) |
| *“Mọi sinh viên đều vượt qua kỳ thi đầu tiên”* | ) |

**Kết luận**

|  |  |
| --- | --- |
| **Phát biểu** | **Biểu thức** |
| *“Một số sinh viên đã vượt qua kỳ thi đầu tiên nhưng chưa đọc cuốn sách toán rời rạc”* | ) |

Trình tự các bước sau đây thể hiện diễn biến sử dụng các luật từ các tiền đề dẫn đến kết luận cuối cùng:

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| **Bước** | **Tiền đề và Kết luận** | **Quy tắc sử dụng** |
| 1 | ) | Tiền đề 1  Existential instantiation |
| 2 |  | Kết luận của bước 1  Đơn giản hóa (2.1)  Đơn giản hóa (2.2) |
| 3 | ) | Tiền đề 2  Universal instantiation |
| 4 |  | Kết luận của bước 3  Kết quả của bước 2.1  Modus Ponens |
| 5 | P(a) | Kết quả của bước 4  Kết quả của bước 2.2  Luật kết hợp |
| 6 | ) | Kết quả của bước 5  Existential generalization |

## **3.2. Đại số Boole**

|  |
| --- |
| George Boole sinh ngày 2-11-1815 ở London. Ông là con trai một nhà bán tạp hóa nhỏ. Vì nhà nghèo nên từ năm 16 tuổi, ông đã phải bươn chải kiếm sống, phụ giúp gia đình bằng nghề dạy học. Năm 20 tuổi, ông mở một trường tư ở quê nhà. Vừa tận tụy dạy học, vừa ra sức tự học, ông đã tích lũy thêm một kiến thức toán học đồ sộ cho riêng mình. Với tài năng vốn có và lòng đam mê, bất chấp hoàn cảnh khó khăn, ông đã cho ra đời hàng loạt công trình nghiên cứu nổi tiếng và rất quan trọng cho ngành toán học thế giới: *“Giải tích toán học của logic”*, *“Các định luật của tư duy”.* Nhờ đó, ông được bổ nhiệm làm Giáo sư toán của trường Nữ hoàng ở Iceland từ năm 1849 cho đến khi mất. Ông mất vào ngày 8-12-1864, thọ 49 tuổi. |

Năm 1938, Claude Shannon, làm việc tại viện Công nghệ Massachusetts chứng tỏrằng có thể dùng các quy tắc cơ bản của lôgic do George Boole đưa ra vào năm 1854trong cuốn “Các quy luật của tư duy” phục vụ cho việc thiết kế các mạch điện. Các quy tắcnày đã tạo nên cơ sở của đại số Boole. Sự hoạt động của một mạch điện được xác địnhbởi một hàm Boole chỉ rõ giá trị của đầu ra đối với mỗi tập đầu vào. Bước đầu tiên trongviệc xây dựng một mạch điện là biểu diễn hàm Boole của nó bằng một biểu thức đượclập bằng cách dùng các phép toán cơ bản của đại số Boole. Biểu thức mà ta sẽ nhậnđược có thể chứa nhiều phép toán hơn mức cần thiết để biểu diễn hàm đó.

|  |
| --- |
| Claude Shannon **(1916 - 2001)** sinh ra ở Petoskey và lớn lên ở Gaylord, Michigan. Cha ông là một doanh nhân và một thẩm phán , còn mẹ ông là một giáo viên ngôn ngữ và một hiệu trưởng trường trung học. Shannon theo học Đại học Michigan, tốt nghiệp năm 1936. Luận văn thạc sĩ Shannon viết vào năm 1936, nghiên cứu các khía cạnh logic của phân tích vi sai. Luận văn thạc sĩ này trình bày ứng dụng đầu tiên của đại số Boolean để thiết kế các mạch chuyển mạch; đó là luận án thạc sĩ nổi tiếng nhất của thế kỷ XX. Ông đã nhận bằng tiến sĩ từ M.I.T vào năm 1940. Shannon gia nhập Phòng thí nghiệm Bell năm 1940, nơi ông nghiên cứu cách thức truyền dữ liệu một cách hiệu quả. Ông là một trong những người đầu tiên sử dụng bit để thể hiện thông tin. Tại phòng thí nghiệm Bell, ông đã làm việc để xác định lưu lượng mà các đường dây điện thoại có thể truyền. Shannon làm nhiều điều cơ bản đóng góp cho lý thuyết thông tin. Đầu những năm 1950, ông là một trong những người sáng lập nghiên cứu về trí tuệ nhân tạo. Ông tham gia giảng dạy ở M.I.T và ông tiếp tục nghiên cứu về lý thuyết thông tin. Shannon nghỉ hưu khi ông 50 tuổi. |

**3.2.1. Định nghĩa đại số Boole**

|  |
| --- |
| **Định nghĩa 3.19** |
| Một đại số Boole là tập hợp A cùng với các phép toán + (cộng), . (nhân), - (phủ định), thỏa mãn các tính chất sau đây:  **a. Tính giao hoán:** với  **b. Tính kết hợp:** với  **c. Tính phân phối:** với :  **d. Phần tử trung hòa:** Tồn tại hai phần tử trung hòa 0, 1 đối với hai phép toán sao cho với mọi x ta có: và  **e. Phần tử bù:** với , tồn tại sao cho: |

**Ví dụ 3.68**

**a.** Đại số logic là một đại số Boole, trong đó A là tập hợp của các mệnh đề, các phép toán tương ứng với các phép toán **.**, +, - và các hằng đúng, hằng sai tương ứng với 2 phần tử trung hòa 1, 0.

b. Cho tập A ={0, 1} và các phép toán **.**, +, - xác định trên A, thỏa mãn:

1 . 1 = 1, 1 . 0 = 0, 0 . 1 = 0, 0 . 0 = 0

1 + 1 = 1, 1 + 0 = 1, 0 + 1 = 1, 0 + 0 = 0

và

Khi đó, A là đại số Boole, 0, 1 là các bit.

### **3.2.2. Các phép toán cơ bản của đại số Boole**

#### *3.2.2.1. Tính chất của đại số Boole*

|  |
| --- |
| **Tính chất của đại số Boole** |
| **Luật nuốt:**  a . 0 = 0 a + 1 = 1  **Luật lũy đẳng:**  a . a = a a + a = a  **Luật De Morgan:**    **Luật phủ định của phủ định:**    **Luật hấp thụ:**  a. (a + b) = a a + (a.b) = a |

#### *3.2.2.2. Biểu thức Boole và hàm Boole*

|  |
| --- |
| **Định nghĩa 3.20** |
| Xét tập B ={0, 1}. Bn = {(x1, x2, x3, …, xn)| xi với 1} là tập n – bộ của 0 và 1.  Biến x được gọi là biến Boole nếu nó chỉ nhận các giá trị từ B.  Hàm từ Bn vào B được gọi là hàm Boole bậc n |

Có hai cách xác định hàm Boole:

+ Thể hiện thông qua bảng giá trị chân lý

+ Thể hiện ở dạng công thức.

**Ví dụ 3.69**

Xét hàm F(x, y) = x với x, y là hàm Boole bậc 2 với F(1, 1) = 0, F(1, 0) = 1, F(0, 1) = 0 và F(0, 0) = 0

Xác định bảng giá trị chân lý cho hàm F(x, y)

*Hướng dẫn:*

Hàm F(x, y) được thể hiện thông qua bảng giá trị chân lý sau đây:

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| x | y | F(x, y) |
| 1 | 1 | 0 |
| 1 | 0 | 1 |
| 0 | 1 | 0 |
| 0 | 0 | 0 |

**Lưu ý:**

Nếu E1 và E2 là các biểu thức Boole thì , (E1E2), (E1 + E2) cũng là các biểu thức Boole.

|  |
| --- |
| **Định nghĩa các phép toán trên hàm Boole** |
| Hai hàm Boole f(x1, x2, x3, …, xn) và g(x1, x2, x3, …, xn) được gọi là bằng nhau nếu cùng có cùng bảng giá trị chân lý.  Ký hiệu f(x1, x2, x3, …, xn) = g(x1, x2, x3, …, xn)  **Phép phủ định** của hàm f(x1, x2, x3, …, xn), ký hiệu là , được xác định giá trị như sau:   |  |  | | --- | --- | | f(x1, x2, x3, …, xn) | , | | 1 | 0 | | 0 | 1 |   **Phép hội** của hai hàm f(x1, x2, x3, …, xn) và g(x1, x2, x3, …, xn) là hàm Boole, ký hiệu ((x1, x2, x3, …, xn), và được xác định giá trị:  ((x1, x2, x3, …, xn) = f(x1, x2, x3, …, xn) g(x1, x2, x3, …, xn)  **Phép tuyển** của hai hàm f(x1, x2, x3, …, xn) và g(x1, x2, x3, …, xn) là hàm Boole, ký hiệu ((x1, x2, x3, …, xn), và được xác định giá trị:  ((x1, x2, x3, …, xn) = f(x1, x2, x3, …, xn) g(x1, x2, x3, …, xn) |

**Ví dụ 3.70**

Xác định giá trị của hàm Boole sau đây:

F(x, y, z) = xy +

*Hướng dẫn:*

Xây dựng bảng giá trị chân lý của hàm F(x, y, z) theo 3 biến Boole x, y, z:

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| x | y | z | xy |  | F(x, y, z) = xy + |
| 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | 1 |
| 1 | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 |
| 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 |
| 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 |
| 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 |
| 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 |
| 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 |

#### *3.2.2.3. Xác định dạng chuẩn tắc của biểu thức Boole*

**Ví dụ 3.71**

Xác định biểu thức Boole của biểu thức F(x, y, z) và G(x, y, z) được thể hiện trong bảng giá trị chân lý sau đây:

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| **x** | **y** | **z** | **F(x, y, z)** | **G(x, y, z)** |
| 1 | 1 | 1 | 0 | 0 |
| 1 | 1 | 0 | 0 | 1 |
| 1 | 0 | 1 | 1 | 0 |
| 1 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 0 | 1 | 1 | 0 | 0 |
| 0 | 1 | 0 | 0 | 1 |
| 0 | 0 | 1 | 0 | 0 |
| 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |

*Hướng dẫn:*

*(Xem lại thuật toán xác định chuẩn tắc hội và chuẩn tắc tuyển ở phần 3.1.5.3. Tìm chuẩn tắc hội hoặc chuẩn tắc tuyển của một biểu thức logic)*

F(x, y, z) = 1 với bộ giá trị x = 1, y = 0 và z = 1, và F(x, y, z) = 0 trong các trường hợp còn lại.

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| **x** | **y** | **z** | **F(x, y, z)** | **Minterm** |
| 1 | 1 | 1 | 0 |  |
| 1 | 1 | 0 | 0 |  |
| 1 | 0 | 1 | 1 | x |
| 1 | 0 | 0 | 0 |  |
| 0 | 1 | 1 | 0 |  |
| 0 | 1 | 0 | 0 |  |
| 0 | 0 | 1 | 0 |  |
| 0 | 0 | 0 | 0 |  |

Do đó F(x, y, z) = x

G(x, y, z) = 1 với bộ giá trị (x = 1, y =1, z = 0) hoặc (x =0, y = 1, z =0)

G(x, y, z) = 0 trong các trường hợp còn lại của (x, y, z)

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| **x** | **y** | **z** | **G(x, y, z)** | **Minterm** |
| 1 | 1 | 1 | 0 |  |
| 1 | 1 | 0 | 1 | x |
| 1 | 0 | 1 | 0 |  |
| 1 | 0 | 0 | 0 |  |
| 0 | 1 | 1 | 0 |  |
| 0 | 1 | 0 | 1 | y |
| 0 | 0 | 1 | 0 |  |
| 0 | 0 | 0 | 0 |  |

Do đó, G(x, y, z) = x + y

|  |
| --- |
| **Định nghĩa 3.21** |
| *Literal* là một biến Boole hoặc phủ định của biến Boole này.  *Minterm* của các biến Boole x1, x2, x3, …, xn là một Boole tích y1y2y3…yn, trong đó yj là các *Literal* (yi = xi hoặc yi = .) |

**Ví dụ 3.72**

Xác định dạng chuẩn tắc của biểu thức Boole sau đây:

F(x, y, z) = (x + y)

*Hướng dẫn*

Lập bảng giá trị chân lý của biểu thức F(x, y, z). Từ đó biểu diễn F(x, y, z) về dạng chuẩn tắc.

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| **x** | **y** | **z** | **x + y** |  | F(x, y, z) = (x + y) | **Minterm** |
| 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 |  |
| 1 | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 | xy |
| 1 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 |  |
| 1 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | x |
| 0 | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 |  |
| 0 | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 | y |
| 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 |  |
| 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 |  |

Do đó, F(x, y, z) = xy + x + y

#### *3.2.2.4. Mạch logic*

|  |  |
| --- | --- |
| **Các cổng logic** | |
| **Cổng AND:** Cổng AND thực hiện hàm hội. Đầu ra *F(x,y)* là hội (tích) của các đầu vào. |  |
| **Cổng OR:** Cổng OR thực hiện hàm tuyển (tổng). Đầu ra *F(x,y)* là tuyển (tổng) của các đầu vào  F |  |
| **Cổng NOT:** Cổng NOT thực hiện hàm phủ định. Cổng chỉ có một đầu vào. Đầu ra *F(x)* là phủ định của đầu vào *x*.  F |  |

**Ví dụ 3.73**

Xây dựng mạch với đầu ra như sau:

a. (x + y)

b.

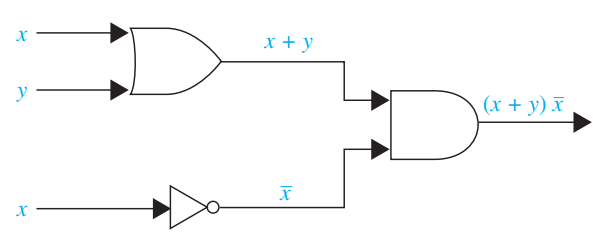
c. (x + y + z) ()

*Hướng dẫn:*

*a*. Với đầu ra là (x + y), ta sẽ sử dụng mạch AND với 2 dữ liệu đầu vào (x+ y) và

Để có đầu vào ( x+ y) ta phải sử dụng mạch OR với 2 dữ liệu vào là x, y

Để có đầu vào ta phải sử dụng mạch NOT

Mạch được xây dựng như sau:

**Hình 3.1:** Mạch được thiết kế của Ví dụ 3.73a

b.

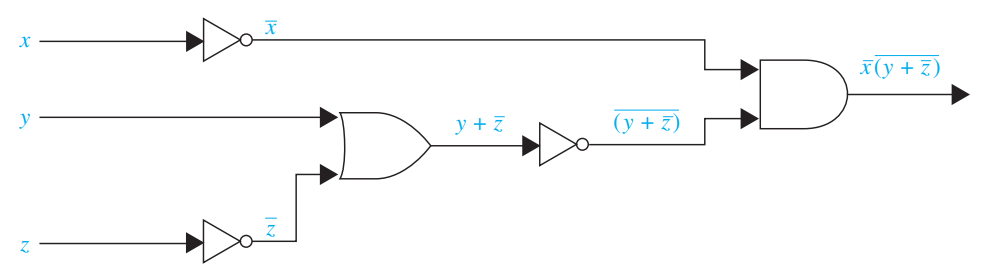
Với đầu ra là , ta sẽ sử dụng mạch AND với 2 dữ liệu đầu vào là là và

Để có dữ liệu đầu ra là ta sử dụng mạch NOT

Để có dữ liệu đầu ra là , ta phải sử dụng 1 mạch NOT, trong đó đó đầu vào của nó là

Để có đầu ra là , ta phải sử dụng 1 mạch OR, với 2 dữ liệu đầu vào là y và

Mạch được xây dựng như sau:



**Hình 3.2:** Mạch được thiết kế của Ví dụ 3.73b

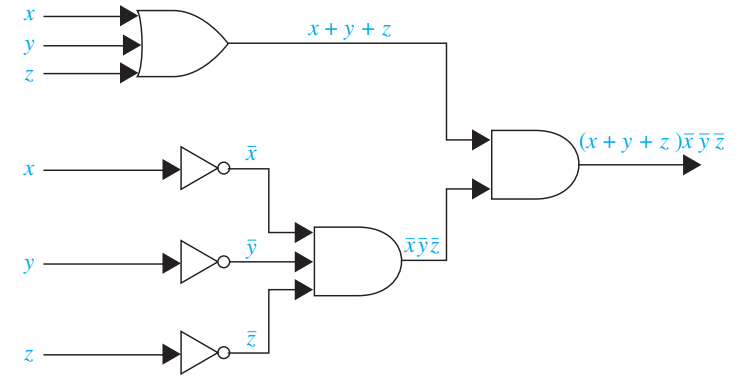
c. (x + y + z) ()

Với đầu ra là (x + y + z) (), ta sử dụng mạch AND với hai dữ liệu đầu vào là (x + y + z) và ()

Để có dữ liệu đầu ra là (x + y + z) ta phải sử dụng mạch OR, với 3 dữ liệu đầu vào là x, y, z.

Để có dữ liệu đầu ra là () ta phải sử dụng 3 mạch NOT, tương ứng với 3 dữ liệu đầu vào là x, y, z

Mạch được xây dựng như sau:



**Hình 3.3:** Mạch được thiết kế của Ví dụ 2.73c

**Ví dụ 3.74**

Xây dựng mạch với đầu ra là hàm F(x, y) được thể hiện qua bảng giá trị chân lý sau đây:

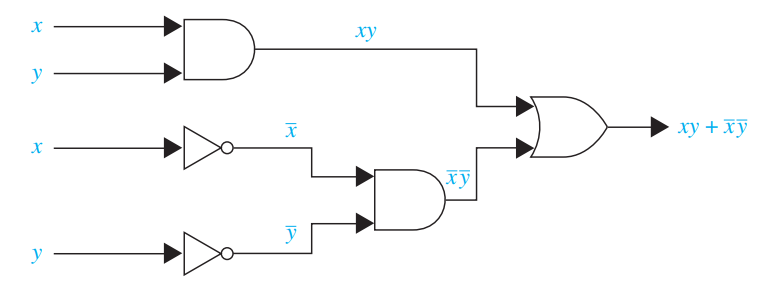
|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| x | y | F(x, y) |
| 1 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 0 |
| 0 | 1 | 0 |
| 0 | 0 | 1 |

*Hướng dẫn:*

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| **x** | **y** | **F(x, y)** | **Minterm** |
| 1 | 1 | 1 | xy |
| 1 | 0 | 0 |  |
| 0 | 1 | 0 |  |
| 0 | 0 | 1 |  |

Dễ dàng thấy F(x, y) = xy +

Do đó, mạch được thiết kế như sau:



**Hình 3.4:** Mạch được thiết kế của Ví dụ 3.74

**Ví dụ 3.75**

Xây dựng mạch với đầu ra là hàm F(x, y) được thể hiện qua bảng giá trị chân lý sau đây:

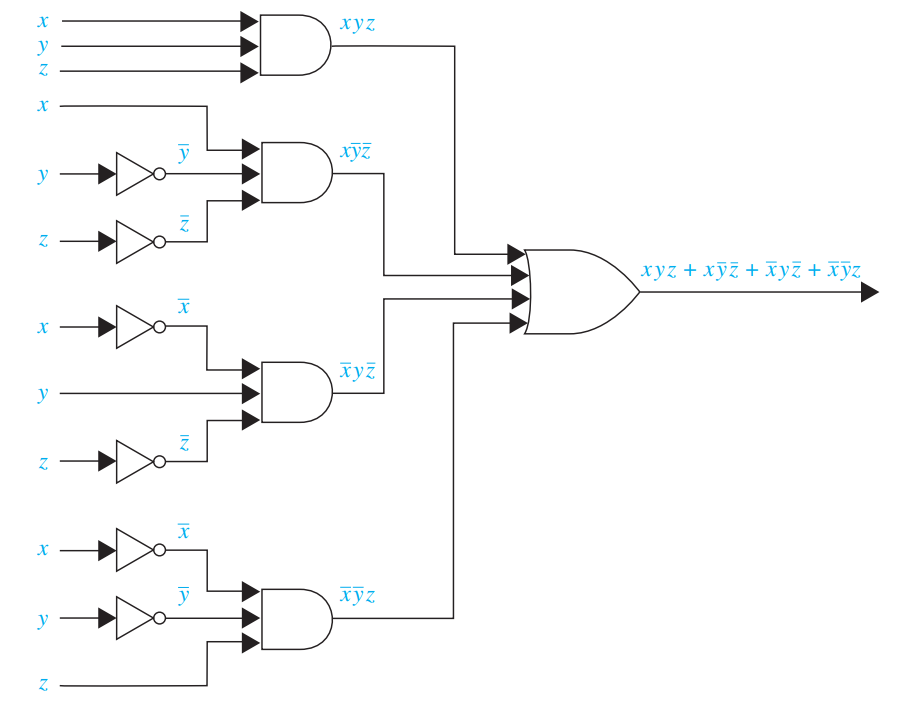
|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| **x** | **y** | **z** | F(x, y, z) |
| 1 | 1 | 1 | 1 |
| 1 | 1 | 0 | 0 |
| 1 | 0 | 1 | 0 |
| 1 | 0 | 0 | 1 |
| 0 | 1 | 1 | 0 |
| 0 | 1 | 0 | 1 |
| 0 | 0 | 1 | 1 |
| 0 | 0 | 0 | 0 |

*Hướng dẫn:*

*Bước 1:* Biểu diễn hàm F(x, y, z)

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| **x** | **y** | **z** | **F(x, y, z)** | **Minterm** |
| 1 | 1 | 1 | 1 | xyz |
| 1 | 1 | 0 | 0 |  |
| 1 | 0 | 1 | 0 |  |
| 1 | 0 | 0 | 1 | x |
| 0 | 1 | 1 | 0 |  |
| 0 | 1 | 0 | 1 | y |
| 0 | 0 | 1 | 1 |  |
| 0 | 0 | 0 | 0 |  |

F(x, y, z) = xyz + x + y +

Bước 2: Thiết kế mạch với đầu ra là hàm F(x, y, z) như sau:

**Hình 3.5:** Mạch được thiết kế của Ví dụ 3.75

### **3.2.3. Cực tiểu hóa hàm logic**

|  |
| --- |
| **MAURICE KARNAUGH (SINH 1924)**  Maurice Karnaugh, sinh ra và lớn lên ở thành phố New York, ông đã nhận bằng cử nhân từ trường Đại học thành phố New York, và nhận bằng thạc sỹ, tiến sĩ từ Đại học Yale. Từ năm 1952 đến năm 1966, ông là nhân viên kỹ thuật tại Phòng thí nghiệm Bell. Từ năm 1966 đến 1970 ông là giám đốc nghiên cứu và phát triển của AT & T. Năm 1970, ông gia nhập IBM và là thành viên của đội ngũ nghiên cứu. Karnaugh đã có những đóng góp cơ bản cho việc ứng dụng các kỹ thuật số trong cả điện toán và viễn thông. |

Trong thiết bị máy tính người ta thiết kế gồm nhiều khâu, mỗi khâu được đặc trưng bằng một phương trình logic. Trong đó mức độ phức tạp của sơ đồ phụ thuộc vào phương trình logic biểu diễn chúng. Việc đạt được độ ổn định cao hay không là tùy thuộc vào phương trình biểu diễn chúng đã ở dạng tối thiểu hóa hay chưa. Để thực hiện được điều đó khi thiết kế mạch số người ta thường đặt ra vấn đề tối thiểu hóa hàm logic. Điều đó có nghĩa là phương trình logic biểu diễn sao cho thực sự gọn nhất (số lượng phép tính và số lượng các số được biểu diễn là ít nhất).

Tuy nhiên trong thực tế không phải lúc nào cũng đạt được lời giải cho bài toán tối ưu hóa.

**Các bước tiến hành tối thiểu hóa:**

- Dùng các phép tối thiểu hóa để tối thiểu hóa các hàm số logic

- Rút ra những thừa số chung nhằm mục đích tối thiểu hóa thêm một bước nữa các phương trình logic.

#### *3.2.3.1. Phương pháp tối thiểu hóa bằng biểu thức đại số*

Đây là phương pháp tối thiểu hóa hàm logic dựa trên các tiên đề các định lý đã biết của đại số Bool, phương pháp này được thực hiện khi các biến số logic không nhiều và ta thực hiện biến đổi trực tiếp biểu thức giải tích của hàm.

**Ví dụ 3.76**

Rút gọn hàm sau:

F(x, y) =

= (

= y +

= x + y.

**Ví dụ 3.77**

Rút gọn hàm sau:

F(x, y, z) =

=

=

=

=

= =

#### *3.2.3.2. Tối thiểu hoá bằng bảng Karnaugh*

Trong phạm vi của giáo trình, chỉ xét f là một hàm Bool theo n biến x1 ,x2 ,…, xn với n = 3 hoặc 4.

Trường hợp 1: n = 3

f là hàm Bool theo 3 biến x, y, z. Khi đó bảng chân trị của f gồm tám hàng. Thay cho bảng chân trị của f ta vẽ một bảng chữ nhật gồm tám ô, tương ứng với tám hàng của bảng chân trị, được đánh dấu như sau:

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
|  | x | x |  |  |
| z | 101 | 111 | 011 | 001 |
|  | 100 | 110 | 010 | 000 |
|  |  | y | y |  |

**Quy ước về cách viết:** Khi một ô nằm trong dãy được đánh dấu bởi x thì tại đó x =1, bởi thì tại đó x =0, tương tự cho y, z.

Các ô tại đó f bằng 1 sẽ được đánh dấu (tô đậm hoặc gạch chéo). Tập các ô được đánh dấu được gọi là **biểu đồ Karnaugh** của f, ký hiệu là kar(f).

Trường hợp 2: n= 4

f là hàm Bool theo 4 biến x, y, z, t. Khi đó bảng chân trị của f gồm 16 hàng. Thay cho bảng chân trị của f ta vẽ một bảng chữ nhật gồm 16 ô, tương ứng với 16 hàng của bảng chân trị, được đánh dấu như sau:

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | *x* | *x* |  |  |  |
| *z* | 1010 | 1110 | 0110 | 0010 |  |
| *z* | 1011 | 1111 | 0111 | 0011 | *t* |
|  | 1001 | 1101 | 0101 | 0001 | *t* |
|  | 1000 | 1100 | 0100 | 0000 |  |
|  |  | y | Y |  |  |

**Quy ước về cách viết:** Khi một ô nằm trong dãy được đánh dấu bởi x thì tại đó x =1, bởi thì tại đó x =0, tương tự cho y, z, t.

Các ô tại đó f bằng 1 sẽ được đánh dấu (tô đậm hoặc gạch chéo). Tập các ô được đánh dấu được gọi là **biểu đồ Karnaugh** của f, ký hiệu là kar(f).

Trong cả hai trường hợp, hai ô được gọi là *kề nhau* (theo nghĩa rộng), nếu chúng là hai ô liền nhau hoặc chúng là ô đầu, ô cuối của cùng một hàng (cột) nào đó. Nhận xét rằng, do cách đánh dấu như trên, hai ô kề nhau chỉ lệch nhau ở một biến duy nhất.

|  |
| --- |
| **Định lý 3.2** |
| Cho f, g là các hàm Bool theo n biến x1, x2,…, xn. Khi đó:   * kar(fg) = kar(f) kar(g) * kar( = kar(f) kar(g) * kar(f) gồm đúng một ô khi và chỉ khi f là một từ tối thiểu |

|  |
| --- |
| **Định nghĩa 3.22** |
| Tế bào là hình chữ nhật (theo nghĩa rộng) gồm 2n-k ô  Cho hàm Bool f. Ta nói T là một tế bào lớn của kar(f) nếu T thoả hai tính chất sau:   * T là một tế bào và T kar(f). * Không tồn tại tế bào T’ nào thỏa T’ T và T T’  kar(f) |

Nếu T là một tế bào thì T là biểu đồ karnaugh của một đơn thức duy nhất m, cách xác định m như sau: lần lượt chiếu T lên các cạnh, nếu toàn bộ hình chiếu nằm trọn trong một từ đơn nào thì từ đơn đó mới xuất hiện trong m.

**Ví dụ 3.78**

a.Biểu đồ Karnaugh của đơn thức

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | x | x |  |  |  |
| z |  |  |  |  |  |
| z |  |  |  |  | t |
|  |  |  |  |  | t |
|  |  |  |  |  |  |
|  |  | y | Y |  |  |

**Hình 3.6:** Biểu đồ Karnaugh của Ví dụ 3.78a

b. Biểu đồ Karnaugh của đơn thức

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | x | x |  |  |  |
| z |  |  |  |  |  |
| z |  |  |  |  | t |
|  |  |  |  |  | t |
|  |  |  |  |  |  |
|  |  | y | Y |  |  |

**Hình 3.7:** Biểu đồ Karnaugh của Ví dụ 3.78b

c. Biểu đồ Karnaugh của đơn thức

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | x | x |  |  |  |
| z |  |  |  |  |  |
| z |  |  |  |  | t |
|  |  |  |  |  | t |
|  |  |  |  |  |  |
|  |  | y | Y |  |  |

**Hình 3.8:** Biểu đồ Karnaugh của Ví dụ 3.78c

d. Hình 3.9: Biểu đồ Karnaugh của đơn thức

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | x | x |  |  |  |
| z |  |  |  |  |  |
| z |  |  |  |  | t |
|  |  |  |  |  | t |
|  |  |  |  |  |  |
|  |  | y | Y |  |  |

**Hình 3.9:** Biểu đồ Karnaugh của Ví dụ 3.78d

**Ví dụ 3.79**

Xét hàm boole theo 4 biến x, y, z, t có biểu đồ karnaugh như sau:

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | x | x |  |  |  |
| z |  |  |  |  |  |
| z |  |  |  |  | t |
|  |  |  |  |  | t |
|  |  |  |  |  |  |
|  |  | y | Y |  |  |

**Hình 3.10:** Biểu đồ Karnaugh của Ví dụ 3.79

Xác định các tế bào lớn của hàm kar(f)?

*Hướng dẫn:*

kar(f) có 6 tế bào lớn sau đây:

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| |  |  |  |  |  |  | | --- | --- | --- | --- | --- | --- | |  | x | x |  |  |  | | z |  |  |  |  |  | | z |  |  |  |  | t | |  |  |  |  |  | t | |  |  |  |  |  |  | |  |  | y | y |  |  |   xz | |  |  |  |  |  |  | | --- | --- | --- | --- | --- | --- | |  | x | x |  |  |  | | Z |  |  |  |  |  | | Z |  |  |  |  | t | |  |  |  |  |  | t | |  |  |  |  |  |  | |  |  | y | y |  |  |   z |
| |  |  |  |  |  |  | | --- | --- | --- | --- | --- | --- | |  | x | x |  |  |  | | z |  |  |  |  |  | | z |  |  |  |  | t | |  |  |  |  |  | t | |  |  |  |  |  |  | |  |  | y | y |  |  | | |  |  |  |  |  |  | | --- | --- | --- | --- | --- | --- | |  | x | x |  |  |  | | Z |  |  |  |  |  | | Z |  |  |  |  | t | |  |  |  |  |  | t | |  |  |  |  |  |  | |  |  | y | y |  |  |   xy |
| |  |  |  |  |  |  | | --- | --- | --- | --- | --- | --- | |  | x | x |  |  |  | | z |  |  |  |  |  | | z |  |  |  |  | t | |  |  |  |  |  | t | |  |  |  |  |  |  | |  |  | y | y |  |  |   **y**t | |  |  |  |  |  |  | | --- | --- | --- | --- | --- | --- | |  | x | x |  |  |  | | Z |  |  |  |  |  | | Z |  |  |  |  | t | |  |  |  |  |  | t | |  |  |  |  |  |  | |  |  | y | y |  |  | |

|  |
| --- |
| **Thuật toán Karnaugh** |
| **Bước 1:** Vẽ biểu đồ karnaugh của f.  **Bước 2:** Xác định tất cả các tế bào lớn của kar(f).  **Bước 3:** Xác định các tế bào lớn m nhất thiết phải chọn.  Ta nhất thiết phải chọn tế bào lớn T khi tồn tại một ô của kar(f) mà ô này chỉ nằm trong tế bào lớn T và không nằm trong bất kỳ tế bào lớn nào khác.  **Bước 4:** Xác định các phủ tối thiểu gồm các tế bào lớn.  Nếu các tế bào lớn chọn được ở bước 3 đã phủ được kar(f) thì ta có duy nhất một phủ tối thiểu gồm các tế bào lớn của kar(f).  Nếu các tế bào lớn chọn được ở bước 3 chưa phủ được kar(f) thì:  Xét một ô chưa bị phủ, sẽ có ít nhất hai tế bào lớn chứa ô này, ta chọn một trong các tế bào lớn này. Cứ tiếp tục như thế ta sẽ tìm được tất cả các phủ gồm các tế bào lớn của kar(f).  Loại bỏ các phủ không tối tiểu, ta tìm được tất cả các phủ tối thiểu gồm các tế bào lớn của kar(f).  **Bước 5:** Xác định các công thức đa thức tối thiểu của f.  Từ các phủ tối thiểu gồm các tế bào lớn của kar(f) tìm được ở bước 4 ta xác định được các công thức đa thức tương ứng của f  Loại bỏ các công thức đa thức mà có một công thức đa thức nào đó thực sự đơn giản hơn chúng.  Các công thức đa thức còn lại chính là các công thức đa thức tối thiểu của f. |

**Ví dụ 3.80**

Tìm các công thức tối thiếu đa thức của hàm boole sau đây:

*Hướng dẫn:*

Xác định các đơn thức

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| |  |  |  |  |  |  | | --- | --- | --- | --- | --- | --- | |  | x | x |  |  |  | | z |  |  |  |  |  | | z |  |  |  |  | t | |  |  |  |  |  | t | |  |  |  |  |  |  | |  |  | y | y |  |  |   xyzt | |  |  |  |  |  |  | | --- | --- | --- | --- | --- | --- | |  | x | x |  |  |  | | Z |  |  |  |  |  | | Z |  |  |  |  | t | |  |  |  |  |  | t | |  |  |  |  |  |  | |  |  | y | y |  |  | |
| |  |  |  |  |  |  | | --- | --- | --- | --- | --- | --- | |  | x | x |  |  |  | | z |  |  |  |  |  | | z |  |  |  |  | t | |  |  |  |  |  | t | |  |  |  |  |  |  | |  |  | y | y |  |  | | |  |  |  |  |  |  | | --- | --- | --- | --- | --- | --- | |  | x | x |  |  |  | | Z |  |  |  |  |  | | Z |  |  |  |  | t | |  |  |  |  |  | t | |  |  |  |  |  |  | |  |  | y | y |  |  | |
| |  |  |  |  |  |  | | --- | --- | --- | --- | --- | --- | |  | x | x |  |  |  | | z |  |  |  |  |  | | z |  |  |  |  | t | |  |  |  |  |  | t | |  |  |  |  |  |  | |  |  | y | y |  |  | | |  |  |  |  |  |  | | --- | --- | --- | --- | --- | --- | |  | x | x |  |  |  | | Z |  |  |  |  |  | | Z |  |  |  |  | t | |  |  |  |  |  | t | |  |  |  |  |  |  | |  |  | y | y |  |  | |

**Bước 1:** Vẽ biểu đồ Karnaugh

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | x | x |  |  |  |
| z |  |  |  |  |  |
| z |  |  |  |  | t |
|  |  |  |  |  | t |
|  |  |  |  |  |  |
|  |  | y | Y |  |  |

**Hình 3.11:** Biểu đồ Karnaugh của Ví dụ 3.80

**Bước 2, 3, 4:** Xác định các tế bào lớn của kar(f)

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| |  |  |  |  |  |  | | --- | --- | --- | --- | --- | --- | |  | x | x |  |  |  | | z |  |  |  |  |  | | z |  |  |  |  | t | |  |  |  |  |  | t | |  |  |  |  |  |  | |  |  | y | y |  |  |   x | |  |  |  |  |  |  | | --- | --- | --- | --- | --- | --- | |  | x | x |  |  |  | | Z |  |  |  |  |  | | Z |  |  |  |  | t | |  |  |  |  |  | t | |  |  |  |  |  |  | |  |  | y | y |  |  |   yz |

**Bước 5:** Ta được duy nhất một phủ tối thiểu gồm các tế bào lớn của kar(f):

**CÂU HỎI VÀ Bài tập chương 3**

### **A. BÀI TẬP CÓ lời giải**

**Bài tập 3.1**

Điền vào các vị trí trống của phát biểu (b) để có cùng dạng logic với các phát biểu (a)

*Câu 3.1.1*

(a) Nếu tất cả các số nguyên là số hữu tỷ, thì số 1 là số hữu tỷ

Tất cả số nguyên là số hữu tỷ

Do đó, số 1 là số hữu tỷ.

(b) Nếu tất cả các biểu thức đại số đều được biểu diễn bằng các ký hiệu tiền tố, thì ...........................................................................................................................................

Do đó, (a+2b) (a2 – b) có thể được viết bằng các ký hiệu tiền tố.

*Hướng dẫn:*

Nếu tất cả các biểu thức đại số đều được biểu diễn bằng các ký hiệu tiền tố, thì *(a+2b) (a2 – b) có thể được viết bằng các ký hiệu tiền tố.*

*Tất cả các biểu thức đại số đều được biểu diễn bằng các ký hiệu tiền tố*

Do đó, (a+2b) (a2 – b) có thể được viết bằng các ký hiệu tiền tố.

*Câu 3.1.2*

(a) Nếu tất cả các chương trình máy tính đều chứa lỗi, thì chương trình này cũng chứa lỗi.

Chương trình này không chứa lỗi

Do đó, không phải tất cả các chương trình máy tính đều chứa lỗi

(b) Nếu......................................................, thì .......................................................

2 không phải là số lẻ.

Do đó, không phải tất cả các số nguyên tố đều là số lẻ.

*Hướng dẫn:*

Nếu *tất cả các số nguyên tố là số lẻ*, thì *2 là số lẻ*

2 không phải là số lẻ.

Do đó, không phải tất cả các số nguyên tố đều là số lẻ.

**Bài tập 3.2**

Thay thế các phát biểu sau đây bằng các mệnh đề logic, sử dụng các phép toán logic

*Câu 3.2.1*

Đặt p = *“Cổ phiếu đang tăng giá”*, q = *“Lãi suất vẫn ổn định”*

a. “*Cổ phiếu đang tăng giá, nhưng lãi suất vẫn ổn định”*

*Hướng dẫn:*

*p*

b. *“Không phải cổ phiếu đang tăng giá, cũng không phải lãi suất đang ổn định”*

*Hướng dẫn:*

*p*

**Bài tập 3.3**

Xây dựng bảng giá trị chân lý cho các biểu thức logic sau đây:

a.

*Hướng dẫn:*

Bảng giá trị chân lý của biểu thức logic được thể hiện như sau:

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| p | Q |  |  |  |  |
| T | T | T | T | F | T |
| T | F | F | T | T | T |
| F | T | F | T | T | T |
| F | F | F | F | T | T |

Kết quả của bảng giá trị chân lý chứng tỏ là một hằng đúng.

Cũng có thể chứng minh bằng các luật logic như sau (xem phần các luật logic)

( (Luật De Morgan)

( (Luật kết hợp)

(Luật phần tử bù)

(Luật lũy đẳng)

b.

*Hướng dẫn:*

Xây dựng bảng giá trị chân lý cho biểu thức logic với 3 biến mệnh đề p, q, r như sau:

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| p | Q | r |  |  |  |
| T | T | T | F | T | T |
| T | T | F | F | F | F |
| T | F | T | T | T | T |
| T | F | F | T | T | T |
| F | T | T | F | T | F |
| F | T | F | F | F | F |
| F | F | T | T | T | F |
| F | F | F | T | T | F |

**Bài tập 3.4**

Kiểm tra tính tương đương logic của các biểu thức sau đây? (Câu trả lời là Có hoặc không bằng cách xây dựng bảng giá trị chân lý)

a. và

*Hướng dẫn:*

Xây dựng bảng giá trị chân lý cho 2 biểu thức như sau:

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| p | q |  |  |  |  |  |
| T | T | F | F | T | T | F |
| T | F | F | T | F | T | F |
| F | T | T | F | F | T | F |
| F | F | T | T | F | F | T |

Rõ ràng, hai biểu thức này không tương đương logic

b. và

*Hướng dẫn:*

Xây dựng bảng giá trị chân lý cho biểu thức với 3 biến mệnh đề p, q, r:

|  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| p | q | r |  |  |  |  |  |
| T | T | T | T | T | T | T | T |
| T | T | F | T | T | F | T | T |
| T | F | T | T | F | T | T | T |
| T | F | F | F | F | F | F | F |
| F | T | T | T | F | F | F | F |
| F | T | F | T | F | F | F | F |
| F | F | T | T | F | F | F | F |
| F | F | F | F | F | F | F | F |

Tất cả các dòng của hai biểu thức có giá trị giống nhau. Do đó khẳng định hai biểu thức và tương đương logic.

c. và

*Hướng dẫn:*

Xây dựng bảng giá trị chân lý cho biểu thức với ba biến mệnh đề p, q, r:

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| p | q | r |  |  |  |  |
| T | T | T | T | T | T | T |
| T | T | F | T | F | T | F |
| T | F | T | T | T | T | T |
| T | F | F | T | F | T | F |
| F | T | T | T | F | T | T |
| F | T | F | T | F | T | F |
| F | F | T | F | F | F | F |
| F | F | F | F | F | F | F |

Giá trị các dòng của hai biểu thức không giống nhau hoàn toàn, do đó hai biểu thức không tương đương logic.

**Bài tập 3.5**

Sử dụng luật De Morgan, viết phủ định cho các phát biểu sau đây:

1. Nam là một giáo sư Toán học và chị gái Nam là một giáo sư Khoa học máy tính.

*Hướng dẫn:*

p= *“Nam là giáo sư Toán học”*

q= *“Chị gái Nam là giáo sư Khoa học máy tính”*

Biểu thức logic của phát biểu trên là

Do đó phủ định của phát biểu trên được viết lại như sau: *“Nam không phải là giáo sư Toán học hoặc chị gái Nam không phải là giáo sư Khoa học máy tính”*

1. Đồng đô la đang ở mức cao nhất mọi thời đại hoặc thị trường chứng khoán đang ở mức thấp nhất.

*Hướng dẫn:*

Đặt p = *“Đồng đô la đang ở mức cao nhất mọi thời đại”;*

q = *“Thị trường chứng khoán đang ở mức thấp nhất”;*

Biểu thức logic của phát biểu trên là

Do đó phủ định của phát biểu trên được viết như sau: “*Không phải đồng đô la đang ở mức cao nhất mọi thời đại và cũng không phải thị trường chứng khoán đang ở mức thấp nhất”*

**Bài tập 3.6**

Sử dụng bảng giá trị chân lý, xác định các biểu thức logic sau đây là hằng đúng hay hằng sai:

a.

*Hướng dẫn*:

Xây dựng bảng giá trị chân lý cho biểu thức:

|  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| P | q |  |  |  |  |  |  |
| T | T | F | F | T | F | F | T |
| T | F | F | T | F | T | T | T |
| F | T | T | F | F | F | T | T |
| F | F | T | T | F | F | T | T |

Do đó, là một hằng đúng.

b.

*Hướng dẫn:*

Xây dựng bảng giá trị chân lý cho biểu thức với ba biến mệnh đề p, q, r, bảng gồm có tám dòng:

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| p | Q | r |  |  |  |  |  | Biểu thức A |
| T | T | T | F | F | F | T | F | F |
| T | T | F | F | F | F | F | F | F |
| T | F | T | F | T | F | F | F | F |
| T | F | F | F | T | F | F | F | F |
| F | T | T | T | F | T | T | T | F |
| F | T | F | T | F | T | F | F | F |
| F | F | T | T | T | F | F | F | F |
| F | F | F | T | T | F | F | F | F |

Giá trị các dòng của biểu thức A bằng F với mọi cặp giá trị của các biến mệnh đề p, q, r. Do đó, A là hằng sai.

**Bài tập 3.7**

Định nghĩa phép loại trừ như sau:

Bảng giá trị chân lý của phép loại trừ được thể hiện:

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| P | Q |  |
| T | T | F |
| T | F | T |
| F | T | T |
| F | F | F |

Cho biết Lập luận và cho biết câu trả lời của bạn.

*Hướng dẫn*:

Lập bảng giá trị chân lý với ba biến mệnh đề p, q, r.

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| P | q | r |  |  |  |  |
| T | T | T | F | F | T | T |
| T | T | F | F | T | F | F |
| T | F | T | T | T | F | F |
| T | F | F | T | F | T | T |
| F | T | T | T | F | F | F |
| F | T | F | T | T | T | T |
| F | F | T | F | T | T | T |
| F | F | F | F | F | F | F |

Khẳng định:

**Bài tập 3.8**

Chứng minh rằng các biểu thức sau đây tương đương logic:

, và

*Hướng dẫn:*

*Có hai cách để chứng minh các biểu thức trên tương đương logic, cách thứ nhất, sử dụng bảng giá trị chân lý, cách thứ hai, sử dụng luật logic*

*Cách 1: Lập bảng giá trị chân lý, bảng gồm tám dòng với ba biến mệnh đề p, q, r*

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| p | q | r |  |  |  |  |  |  |  |  |
| T | T | T | F | F | T | F | F | T | T | T |
| T | T | F | F | T | T | F | T | T | T | T |
| T | F | T | T | F | F | T | F | T | T | T |
| T | F | F | T | T | F | T | T | F | F | F |
| F | T | T | F | F | T | F | F | T | T | T |
| F | T | F | F | T | T | F | F | T | T | T |
| F | F | T | T | F | T | F | F | T | T | T |
| F | F | F | T | T | T | F | F | T | T | T |

Giá trị các dòng trong bảng giá trị chân lý của 3 biểu thức giống hệt nhau, do đó khẳng định 3 biểu thức trên tương đương logic.

*Cách 2: Sử dụng luật logic*

(Luật kéo theo)

(Luật kéo theo)

(Luật De Morgan)

(Luật phủ định của phủ định)

(Luật kéo theo)

(Luật De Morgan)

(Luật phủ định của phủ định)

(Luật kết hợp)

A, B, C tương đương logic với biểu thức , do đó A, B, C tương đương logic với nhau.

**Bài tập 3.9**

Xác định hai biểu thức logic sau đây có tương đương logic?

) và

*Hướng dẫn:*

Xây dựng bảng giá trị chân lý cho ba biến mệnh đề p, q, r như sau:

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| p | q | R |  |  |  |  |
| T | T | T | T | T | T | T |
| T | T | F | T | F | F | F |
| T | F | T | F | T | T | F |
| T | F | F | F | T | T | T |
| F | T | T | T | T | T | T |
| F | T | F | T | F | T | F |
| F | F | T | T | T | T | T |
| F | F | F | T | T | T | F |

Kết luận:Hai biểu thức) và không tương đương logic

**Bài tập 3.10**

Sử dụng và viết lại biểu thức logic mà không sử dụng phép ,

*Hướng dẫn:*

(Luật kéo theo)

(Luật De Morgan)

**Bài tập 3.11**

Sử dụng các luật logic chứng minh biểu thức sau đây là hằng đúng

(

*Hướng dẫn:*

(

(Luật tương đương)

(Luật kéo theo)

(Luật De Morgan)

(Luật kết hợp)

(Luật phần tử bù)

(Luật thống trị)

(Luật trung hòa)

(Luật phân phối)

(Luật phần tử bù)

(Luật trung hòa)

(Luật kéo theo)

Đặt

(Luật kéo theo)

**Bài tập 3.12**

Chứng minh rằng:

*Hướng dẫn:*

**Biến đổi vế trái để được biểu thức vế phải**

(Luật De Morgan)

(Luật De Morgan)

(Luật kết hợp)

(Luật phần tử bù)

(Luật trung hòa)

Bài tập 3.13

Chỉ ra các bước suy diễn của suy luận dưới đây?

|  |
| --- |
| Tiền đề  (a)  A (b)  **(c)** |
| Kết luận:  D |

Hướng dẫn:

Sử dụng các quy tắc suy diễn để chứng minh

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| **Bước** | **Tiền đề và Kết luận** | **Quy tắc sử dụng** |
| 1 | A | (a) Tiền đề  *(b)* Tiền đề  *Quy tắc khẳng định* |
| 2 |  | Kết luận của bước 1  *Quy tắc rút gọn* |
| 3 | D | Kết luận của bước 2  *(e)* Tiền đề  Tam đoạn luận rời |

Bài tập 3.14

Hãy chỉ ra phương pháp suy luận, cho biết các suy luận đó có hợp lý hay không? Giải thích bằng cách quy tắc suy diễn

Chủ nhật tuần vừa rồi cô ấy không về nhà

Nếu cô ấy về nhà thì kiểu gì cô ấy cũng ra bờ ao

Nếu ra bờ ao kiểu gì cô ấy cũng ra gốc cây đó

Nếu ra gốc cây thì cô ấy đã nhìn thấy cái lược và mang nó đi

Thế mà cái lược vẫn còn đó.

Hướng dẫn:

Thiết lập các biến mệnh đề sau đây:

p = “Cô ấy về nhà”

q = “Cô ấy ra bờ ao”

r = “Cô ấy ra gốc cây”

t = “Cô ấy nhìn thấy cái lược”

s = “Cô ấy mang cái lược đi”

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| **Phát biểu** | **Biểu thức** |  |
| Nếu cô ấy về nhà thì kiểu gì cô ấy cũng ra bờ ao |  | *(a)* |
| Nếu ra bờ ao kiểu gì cô ấy cũng ra gốc cây đó |  | *(b)* |
| Nếu ra gốc cây thì cô ấy đã nhìn thấy cái lược và mang nó đi |  | *(c)*  *(d)* |
| Thế mà cái lược vẫn còn đó. |  | *(e)* |
| Kết luận: Chủ nhật tuần vừa rồi cô ấy không về nhà |  |  |

Các bước của suy luận:

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| **Bước** | **Tiền đề và Kết luận** | **Quy tắc sử dụng** |
| 1 |  | (a) Tiền đề  *(b)* Tiền đề  *Tam đoạn luận giả định* |
| 2 |  | Kết luận của bước 1  (c)  (d)  *Tam đoạn luận giả định mở rộng* |
| 3 |  | Kết luận của bước 2  *(e)* Tiền đề  Modus Tollens |

Suy luận trên hoàn toàn hợp lý.

Bài tập 3.15

Viết lại phát biểu sau đây bằng các phát biểu tương đương, nhưng không sử dụng các ký hiệu

Hướng dẫn:

Tất cả các số thực đều có bình phương là một số không âm.

Hoặc mỗi số thực đều có bình phương là một số không âm.

Hoặc số thực bất kỳ đều có bình phương là một số không âm.

Hoặc bình phương của một số thực là một số không âm.

Bài tập 3.16

Viết lại các phát biểu có dạng sau: , nếu P(x) thì Q(x), không sử dụng các lượng từ và các biến:

, nếu x > 2 thì x2 > 4

Hướng dẫn:

Nếu một số thực lớn hơn 2 thì bình phương của nó lớn hơn 4

Hoặc Bình phương của bất kỳ số thực lớn hơn 2 đều lớn hơn 4

Hoặc Bình phương của tất cả các số thực lớn hơn 2 đều lớn hơn 4.

Bài tập 3.17

Tối thiểu hóa hàm boole sau đây:

a.

*Hướng dẫn:*

Xác định các đơn thức

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| |  |  |  | | --- | --- | --- | |  | *y* |  | | *x* |  |  | |  |  |  |   *xy* | |  |  |  | | --- | --- | --- | |  | *y* |  | | *x* |  |  | |  |  |  | | |  |  |  | | --- | --- | --- | |  | *y* |  | | *x* |  |  | |  |  |  | |

Biểu đồ Karnaugh biểu diễn

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  | *y* |  |
| *x* |  |  |
|  |  |  |

*Xác định các tế bào lớn*

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| |  |  |  | | --- | --- | --- | |  | *y* |  | | *x* |  |  | |  |  |  |   *y* | |  |  |  | | --- | --- | --- | |  | *y* |  | | *X* |  |  | |  |  |  | |

Do đó được thay bằng

b.

*Hướng dẫn:*

*Xác định các đơn thức*

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| |  |  |  |  |  | | --- | --- | --- | --- | --- | |  | yz |  |  |  | | x |  |  |  |  | |  |  |  |  |  |   xyz | |  |  |  |  |  | | --- | --- | --- | --- | --- | |  | yz |  |  |  | | X |  |  |  |  | |  |  |  |  |  | |
| |  |  |  |  |  | | --- | --- | --- | --- | --- | |  | yz |  |  |  | | x |  |  |  |  | |  |  |  |  |  | | |  |  |  |  |  | | --- | --- | --- | --- | --- | |  | yz |  |  |  | | X |  |  |  |  | |  |  |  |  |  | |

Biểu đồ Karnaugh biểu diễn biểu thức:

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
|  | yz |  |  |  |
| x |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |

Xác định các tế bào lớn

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| |  |  |  |  |  | | --- | --- | --- | --- | --- | |  | yz |  |  |  | | x |  |  |  |  | |  |  |  |  |  |   xy | |  |  |  |  |  | | --- | --- | --- | --- | --- | |  | yz |  |  |  | | X |  |  |  |  | |  |  |  |  |  | |
| |  |  |  |  |  | | --- | --- | --- | --- | --- | |  | yz |  |  |  | | x |  |  |  |  | |  |  |  |  |  | | Do đó được thay thế bằng xy + + |

c.

*Hướng dẫn:*

*Xác định các đơn thức*

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| |  |  |  |  |  | | --- | --- | --- | --- | --- | |  | yz |  |  |  | | x |  |  |  |  | |  |  |  |  |  |   xyz | |  |  |  |  |  | | --- | --- | --- | --- | --- | |  | yz |  |  |  | | X |  |  |  |  | |  |  |  |  |  | |
| |  |  |  |  |  | | --- | --- | --- | --- | --- | |  | yz |  |  |  | | x |  |  |  |  | |  |  |  |  |  | | |  |  |  |  |  | | --- | --- | --- | --- | --- | |  | yz |  |  |  | | X |  |  |  |  | |  |  |  |  |  | |
| |  |  |  |  |  | | --- | --- | --- | --- | --- | |  | yz |  |  |  | | x |  |  |  |  | |  |  |  |  |  | |  |

Biểu đồ Karnaugh biểu diễn biểu thức:

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
|  | yz |  |  |  |
| x |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |

Xác định các tế bào lớn

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| |  |  |  |  |  | | --- | --- | --- | --- | --- | |  | yz |  |  |  | | x |  |  |  |  | |  |  |  |  |  |   xy | |  |  |  |  |  | | --- | --- | --- | --- | --- | |  | yz |  |  |  | | X |  |  |  |  | |  |  |  |  |  |   z |

Do đó được thay thế bởi xy + z.

d.

*Hướng dẫn:*

*Xác định các đơn thức*

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| |  |  |  |  |  | | --- | --- | --- | --- | --- | |  | yz |  |  |  | | x |  |  |  |  | |  |  |  |  |  |   xyz | |  |  |  |  |  | | --- | --- | --- | --- | --- | |  | yz |  |  |  | | X |  |  |  |  | |  |  |  |  |  | |
| |  |  |  |  |  | | --- | --- | --- | --- | --- | |  | yz |  |  |  | | x |  |  |  |  | |  |  |  |  |  | | |  |  |  |  |  | | --- | --- | --- | --- | --- | |  | yz |  |  |  | | X |  |  |  |  | |  |  |  |  |  | |
| |  |  |  |  |  | | --- | --- | --- | --- | --- | |  | yz |  |  |  | | x |  |  |  |  | |  |  |  |  |  | |  |

Biểu đồ Karnaugh biểu diễn biểu thức:

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
|  | yz |  |  |  |
| x |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |

Xác định các tế bào lớn

Có hai cách xác định

*Cách 1:*

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| |  |  |  |  |  | | --- | --- | --- | --- | --- | |  | yz |  |  |  | | x |  |  |  |  | |  |  |  |  |  |   xy | |  |  |  |  |  | | --- | --- | --- | --- | --- | |  | yz |  |  |  | | X |  |  |  |  | |  |  |  |  |  | |
| |  |  |  |  |  | | --- | --- | --- | --- | --- | |  | yz |  |  |  | | x |  |  |  |  | |  |  |  |  |  | | Do đó, được thay thế bằng xy + + |

*Cách 2:*

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| |  |  |  |  |  | | --- | --- | --- | --- | --- | |  | yz |  |  |  | | x |  |  |  |  | |  |  |  |  |  |   xy | |  |  |  |  |  | | --- | --- | --- | --- | --- | |  | yz |  |  |  | | X |  |  |  |  | |  |  |  |  |  | |
| |  |  |  |  |  | | --- | --- | --- | --- | --- | |  | yz |  |  |  | | x |  |  |  |  | |  |  |  |  |  | | Do đó được thay thế bằng xy + + |

e.

*Hướng dẫn:*

*Xác định các đơn thức*

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| |  |  |  |  |  | | --- | --- | --- | --- | --- | |  | zt |  |  |  | | xy |  |  |  |  | |  |  |  |  |  | |  |  |  |  |  | |  |  |  |  |  |   *xyzt* | |  |  |  |  |  | | --- | --- | --- | --- | --- | |  | zt |  |  |  | | xy |  |  |  |  | |  |  |  |  |  | |  |  |  |  |  | |  |  |  |  |  | |
| |  |  |  |  |  | | --- | --- | --- | --- | --- | |  | zt |  |  |  | | xy |  |  |  |  | |  |  |  |  |  | |  |  |  |  |  | |  |  |  |  |  | | |  |  |  |  |  | | --- | --- | --- | --- | --- | |  | zt |  |  |  | | xy |  |  |  |  | |  |  |  |  |  | |  |  |  |  |  | |  |  |  |  |  | |

Biểu đồ Karnaugh biểu diễn biểu thức:

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
|  | zt |  |  |  |
| xy |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |

Xác định các tế bào lớn

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
|  | zt |  |  |  |
| xy |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |

*y +z*

*Do đó được thay thế bằng y + z*

*f.*

*Hướng dẫn:*

*Xác định các đơn thức*

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| |  |  |  |  |  | | --- | --- | --- | --- | --- | |  | zt |  |  |  | | xy |  |  |  |  | |  |  |  |  |  | |  |  |  |  |  | |  |  |  |  |  | | |  |  |  |  |  | | --- | --- | --- | --- | --- | |  | zt |  |  |  | | xy |  |  |  |  | |  |  |  |  |  | |  |  |  |  |  | |  |  |  |  |  | |
| |  |  |  |  |  | | --- | --- | --- | --- | --- | |  | zt |  |  |  | | xy |  |  |  |  | |  |  |  |  |  | |  |  |  |  |  | |  |  |  |  |  | | |  |  |  |  |  | | --- | --- | --- | --- | --- | |  | zt |  |  |  | | xy |  |  |  |  | |  |  |  |  |  | |  |  |  |  |  | |  |  |  |  |  | |

Biểu đồ Karnaugh biểu diễn biểu thức:

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
|  | zt |  |  |  |
| xy |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |

Xác định các tế bào lớn

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| |  |  |  |  |  | | --- | --- | --- | --- | --- | |  | zt |  |  |  | | xy |  |  |  |  | |  |  |  |  |  | |  |  |  |  |  | |  |  |  |  |  |   *xz* | |  |  |  |  |  | | --- | --- | --- | --- | --- | |  | zt |  |  |  | | xy |  |  |  |  | |  |  |  |  |  | |  |  |  |  |  | |  |  |  |  |  | |
| |  |  |  |  |  | | --- | --- | --- | --- | --- | |  | zt |  |  |  | | xy |  |  |  |  | |  |  |  |  |  | |  |  |  |  |  | |  |  |  |  |  |   *yz* | Do đó, được thay thế bởi *xz +*  + *yz* |

### b. Bài tập sinh viên tự làm

**Bài tập 3.18**

Điền vào các vị trí trống của phát biểu (b) để có cùng dạng logic với các phát biểu (a)

(a) Nếu n chia hết cho 6, thì n chia hết cho 3.

Nếu n chia hết cho 3 thì tổng các chữ số của n chia hết cho 3

Do đó, nếu n chia hết cho 6 thì tổng các chữ số của n chia hết cho 3.

(Giả sử rằng n là số nguyên cố định, cụ thể)

(b) Nếu hàm này là ..............................., thì hàm này là hàm khả vi

Nếu hàm này là................................, thì hàm này là hàm liên tục

Do đó, nếu hàm này là một đa thức, thì hàm này là .........................................

**Bài tập 3.19**

Thay thế các phát biểu sau đây bằng các mệnh đề logic, sử dụng các phép toán logic

*a.* Đặt r = *“Nam là giáo sư Toán học”,* s = *“Nam là giáo sư Khoa học máy tính”*

Phát biểu: *“Nam là giáo sư Toán học, nhưng Nam không phải là giáo sư Khoa học máy tính”*

*b.* Đặt p *= “Đa thức có bậc bằng 2”,* q = *“Đa thức có bậc bằng 3”*

Phát biểu: *“Đa thức này chỉ có bậc bằng 2, hoặc chỉ có bậc bằng 3”*

*c.* ***“****Bạn không thể chỉnh sửa mục được bảo mật của Wikipedia trừ khi bạn là quản trị viên”*

Thể hiện câu trả lời với mệnh đề a = *“Bạn có thể chỉnh sửa mục được bảo mật của Wikipedia”,* b = *“Bạn là quản trị viên”*

*d.* *“Bạn chỉ được xem phim chỉ khi bạn trên 18 tuổi hoặc bạn được cha mẹ cho phép”*

Thể hiện bằng biểu thức logic với các biến mệnh đề p = *“Bạn được xem phim”*, q = *“Bạn trên 18 tuổi”*, r = *“Được cha mẹ cho phép”*

e. *“Bạn chỉ có thể tốt nghiệp đại học nếu bạn đã hoàn thành đủ số tín chỉ, không nợ tiền học phí, và trả hết sách đã mượn cho thư viện”*

Thể hiện bằng biểu thức logic với các biến mệnh đề p = *“Bạn có thể tốt nghiệp”*, q = *“Bạn hoàn thành đủ số tín chỉ”,* r *= “Nợ tiền học phí”*, t = *“Trả hết sách đã mượn cho thư viện”*

**Bài tập 3.20**

Xây dựng bảng giá trị chân lý cho các biểu thức logic sau đây:

a.

b.

**Bài tập 3.21**

Kiểm tra tính tương đương logic của các biểu thức sau đây? (Câu trả lời là Có hoặc không bằng cách xây dựng bảng giá trị chân lý)

a. và p

b. và t

c. và p

d. và )

e. và

**Bài tập 3.22**

Trong Ví dụ 3.26, nhà logic học Smullyan đã kể về một hòn đảo, các cư dân trên đảo chỉ gồm 2 loại người: Hiệp sĩ, những người luôn nói sự thật, và nô lệ, những kẻ luôn nói dối. Bạn gặp 2 cư dân trên đảo, A và B. Xác định A, B thuộc kiểu người nào (nếu có thể), dựa vào các phát biểu của A và B. Nếu không thể xác định chính xác A, B, bạn có thể rút ra được kết luận nào khác?

a. A nói *“Ít nhất một trong hai chúng tôi là nô lệ”*, B không nói gì.

b. A nói *“Cả hai chúng tôi đều là hiệp sĩ”* , B nói *“A là nô lệ”*

c. A nói *“Tôi là một nô lệ hoặc B là hiệp sĩ”*, B không nói gì.

d. Cả A và B đều nói *“Tôi là một hiệp sĩ”*

e. A nói *“Cả hai chúng tôi đều là nô lệ”*, B không nói gì

**Bài tập 3.23**

Sử dụng luật De Morgan, viết phủ định cho các phát biểu sau đây:

a. Chữ số đơn vị của phép tính 467 là 4 hoặc 6.

b. Chương trình này có lỗi trong 10 dòng đầu tiên hoặc nó đang được chạy với bộ dữ liệu không đầy đủ.

c. Tàu đến trễ hoặc đồng hồ của tôi chạy nhanh.

**Bài tập 3.24**

Sử dụng bảng giá trị chân lý, xác định các biểu thức logic sau đây là hằng đúng hay hằng sai:

a.

b.

**Bài tập 3.25**

Định nghĩa phép loại trừ như sau:

Bảng giá trị chân lý của phép loại trừ được thể hiện:

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| P | Q |  |
| T | T | F |
| T | F | T |
| F | T | T |
| F | F | F |

a. Tìm kiếm 1 biểu thức logic đơn giản hơn tương đương logic với ,

b. Cho biết ? Lập luận và cho biết câu trả lời của bạn.

**Bài tập 3.26**

Sử dụng bảng giá trị chân lý, chứng minh rằng

a.

b.

**Bài tập 3.27**

Viết lại các phát biểu sau đây ở dạng biểu thức? Kiểm tra tính tương đương logic của các biểu thức thu được?

*“Nếu 2 là ước số của n, 3 là ước số của n thì 6 là ước số của n”*

*“Nếu 2 không là ước số của n, 3 không là ước số của n thì 6 không là ước số của n”*

**Bài tập 3.28**

Sử dụng và viết lại các biểu thức logic mà không sử dụng phép ,

a.

b. (

**Bài tập 3.29**

Nếu P và Q là hai biểu thức tương đương logic là là một hằng đúng. Ngược lại nếu là một hằng đúng, thì P và Q tương đương logic. Sử dụng phép kéo theo hai chiều , để chuyển đổi các tương đương logic sau đây về một hằng đúng. Sau đó lập bảng giá trị chân lý để xác minh:

a.

b.

c.

**Bài tập 3.30**

Chứng minh rằng:

là một hằng đúng

a. Bằng cách lập bảng giá trị chân lý.

b. Bằng các luật logic

**Bài tập 3.31**

Sử dụng các luật logic chứng minh các biểu thức sau đây là hằng đúng

a.

b.

c.

**Bài tập 3.32**

Cho chứng minh sau đây, sử dụng các luật logic, trong tương bước biến đổi, hãy chỉ các luật được sử dụng

Bài tập 3.32a

*(Luật…….)*

*(Luật…….)*

*(Luật…….)*

*(Luật…….)*

Bài tập 3.32b

*(Luật…….)*

*(Luật…….)*

*(Luật…….)*

*(Luật…….)*

**Bài tập 3.33**

Chứng tỏ các biểu thức sau đây

a.

b.

Bài tập 3.34

Sử dụng quy tắc Modus Ponens và Modus Tollens, điền vào các chỗ trống, để tạo ra các kết luận hợp lý

a. Nếu là số hữu tỷ, thì tồn tại bộ số nguyên a, b để

Không tồn tại bộ số nguyên a, b để

b. Nếu hình này là một hình tứ giác, thì tổng các góc của nó bằng 3600

Tổng các góc của nó không bằng 3600

c. Nếu họ không biết địa chỉ này, họ đã gọi điện.

Họ đã biết về địa chỉ này.

Bài tập 3.35

Hãy chỉ ra phương pháp suy luận, cho biết các suy luận đó có hợp lý hay không? Giải thích bằng cách quy tắc suy diễn

Tôi phải đi học thêm ngoại ngữ

Nếu sau khi tốt nghiệp mà tôi không có chứng chỉ ngoại ngữ thì tôi sẽ khó xin được việc làm.

Nếu không xin được việc làm thì tôi sẽ không ổn định được cuộc sống riêng.

Nếu không ổn định được cuộc sống riêng thì cô ấy sẽ không lấy tôi.

Bây giờ cô ấy đã là vợ của tôi.

Bài tập 3.36

Chuyển biểu thức sau sang chuẩn tắc hội hoặc chuẩn tắc tuyển

a.

b.

Bài tập 3.37

Sử dụng các luật logic, xác định dạng chuẩn tắc hội hoặc chuẩn tắc tuyển của các biểu thức sau đây:

a.

b.

c.

ĐẠI SỐ BOOLE

Bài tập 3.38

Xác định hàm F(x, y, z) , biết rằng F(x, y, z) = 1 khi và chỉ khi:

a. x = y = 0, z = 1

b. x = 0, y = 1, z = 0

c. x = 0, y = z = 1.

d. x = y = z = 0

Bài tập 3.39

Xác định dạng chuẩn tắc của hàm f(x, y, z) của các hàm sau đây:

a. F (x, y, z) = x + y + zb. F (x, y, z) = (x + z)yc. F (x, y, z) = xd. F (x, y, z) = x

Bài tập 3.40

Hãy xác định công thức tối thiểu của hàm boole sau đây:

Bài tập 3.41

Sử dụng biểu đồ Karnaugh, tối thiểu hóa các biểu thức sau đây:

a.

b.

c.

d.

e.

f.

g.

e.

f.

## TÀI LIỆU THAM KHẢO

[1]. **GS.TS Nguyễn Hữu Anh**, Giáo trình Toán rời rạc, NXB Lao động Xã hội, 1995.

[2]. **Ngô Đắc Tân,** Lý thuyết tổ hợp và đồ thị, NXB Đại học Quốc Gia Hà Nội, 2003.

[3]. **Kenneth H. Rosen,** Discrete Mathematics and Its Applications, Seventh Edition, Monmouth University, 2012.

[4]. **Susanna S. Epp**, Discrete Mathematics with Applications, Fourth Edition, DePaul University, 2010.

[5]. **Robin J. Wilson**, Introduction to Graph Theory, Fourth Edition, Longman Group Ltd, 1996.

[6]. **Mordechai Ben-Ari**, Mathematical Logic for Computer Science, Third Edition, Springer-Verlag London 2009, 2012.